Министерство образования и науки Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

В.Ш. СУЛАБЕРИДЗЕ

МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2013

УДК 53.087(075.8)
С89

Сулаберидзе, В.Ш.

С89 Методы анализа и обработки измеренных значений величин: учебное пособие / В.Ш. Сулаберидзе; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2013. – 122 с.
ISBN 978-5-85546-742-0

Рассмотрены основные понятия и методы теории погрешности измерений, основанные на обобщенной схеме оценивания погрешностей, включающей в себя: выявление источников погрешности, их анализ, принятие модели погрешности, определение ее параметров, выбор методов оценки, оценивание. Описаны подход и последовательность действий при оценивании и выражении неопределенности измерений.

Приведены примеры обработки результатов наблюдений в рамках теории погрешности и концепции неопределенности в измерениях разных категорий: однократных, многократных, косвенных и совместных.

Предназначено для студентов, изучающих дисциплины "Общая теория измерений", "Основы теории измерений".

УДК 53.087(075.8)

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. ФГУП "ВНИИМ им. Д.И.Менделеева" *А.И.Походун*; д-р техн. наук, проф. БГТУ *Ю.В.Загашвили*

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета

ISBN 978-5-85546-742-0

ВВЕДЕНИЕ

В международной метрологической практике существует проблема однозначности (или неоднозначности) трактовки основных понятий. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно ознакомиться с "Международным словарем по метрологии (VIM-3)", "Руководством по выражению неопределенности измерений (GUM)", федеральным законом «Об обеспечении единства измерений» №102-ФЗ, национальным стандартом ГОСТ Р 54500.1-2011, межгосударственными правилами и рекомендациями по метрологии: РМГ 29-99, РМГ 43-2001, РМГ 91-2009, ПМГ 96-2009. Для однозначного понимания условимся о следующем.

Измерение – процесс экспериментального получения одного или нескольких значений величины, которые могут быть обоснованно приписаны величине (VIM, термин 2.1). Для случаев измерений физических величин более конкретным представляется определение из РМГ 29-99: измерение – совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины.

Величина – свойство явления или вещества, которое может быть выражено количественно в виде числа с указанием отличительного признака как основы сравнения (VIM, термин 1.1). В качестве основы сравнения физических величин может быть единица измерения, эталон единицы физической величины (ФВ) или стандартный образец, методика выполнения измерений.

Результат измерения – набор значений величины, приписываемых измеряемой величине вместе с любой другой доступной и существенной информацией (VIM, термин 2.9).

Измеренное значение величины – значение величины, которое представляет результат измерения (VIM, термин 2.10). Обработка измеренных значений приводит к получению результата измерений.

На базе этих определений можно сформулировать следующие примечания:

1. Цель измерений заключается в получении измеренных значений величины, максимально возможно приближенных к значению измеряемой величины. Это, кстати, не противоречит GUM.

2.Цель измерений конкретна в каждой конкретной измерительной задаче, сформулированной для модели объекта измерений, адекватной реально существующему объекту.

3.Измеряемая величина существует и может быть выражена числом или набором чисел, укладывающихся в определенный диапазон значений при заданной доверительной вероятности.

4.Измеренное значение величины есть не что иное, как единичный результат наблюдения в совокупности наблюдений, представляющий собой случайное число.

5. Цель обработки измеренных значений – получение результата измерений.

6.Результат измерения величины может быть представлен в форме точечной оценки с указанием ее дисперсии и/или других характеристик рассеяния, а также интервальной оценки с указанием интервала рассеяния измеренных значений или значений измеряемой величины при заданной доверительной вероятности.

7.Результат измерений всегда содержит в себе искомое значение измеряемой величины и характеристики отклонений, проявляющих себя в форме случайных или неслучайных составляющих.

8.Результат измерения физической величины выражается числом или совокупностью чисел, отражающих соотношение между полученными значениями и единицей физической величины.

В классической теории измерений отклонение результата измерений от значения измеряемой величины (здесь и далее будем иметь в виду физические величины) принято называть погрешностью. При этом значение измеряемой величины отождествляют с истинным или действительным. В дальнейшем мы будем использовать словосочетания: «погрешность измерения» и «погрешность результата измерения», имея в виду примечание 7.

В концепции неопределенности измерений рассеяние значений величины, приписываемых измеряемой величине, называется ***неопределенностью измерений*** ("Международный словарь по метрологии: VIM-3", издание JCGM 200:2012, термин 2.26). Таким образом, точечные или интервальные оценки рассеяния в концепции неопределенности характеризуют не отклонения измеренных значений от действительного или опорного значения измеряемой величины, а рассеяние значений измеряемой величины или интервал, который с заданной вероятностью охватывает совокупность этих значений.

Поскольку теория погрешности измерений проработана довольно хорошо и общепринята, а методы расчетов по концепции неопределенности основаны на методах и математическом аппарате теории погрешности, большая часть этого раздела посвящена описанию методов обработки измеренных значений величин, разработанных в классической теории измерений. В то же время, в приводимых примерах даны простые способы выражения неопределенности измерений. Для более подробного знакомства с концепцией и практическими рекомендациями по выражению неопределенности измерений следует обратиться к первоисточнику (Руководство по выражению неопределенности измерений: GUM, издание JCGM 100:2008, или перевод этого Руководства, изданный ВНИИМ).

1. ВИДЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Необходимо различать погрешность измерений и погрешность средства измерений.

Погрешности измерений, так же как и погрешности средств измерений, классифицируются по различным признакам.

По характеру проявления погрешности делятся на случайные, систематические, прогрессирующие и грубые (промахи).

Случайной погрешностью называется составляющая погрешности результата измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях, проведенных с одинаковой тщательностью, одной и той же величины. Предполагается при этом, что случайная погрешность – центрированная случайная величина (математическое ожидание равно нулю).

Систематической погрешностью называют составляющую погрешности результата измерения, остающуюся постоянной или же закономерно изменяющейся при повторных измерениях одной и той же величины. В стандартах ИСО/МЭК 5725 применен термин «правильность результата», который по существу характеризует систематическую погрешность результата измерений.

В зависимости от характера изменения во времени систематическая погрешность подразделяется на: постоянную, прогрессирующую, периодическую и меняющуюся по сложному закону. Прогрессирующая погрешность в большей степени характеризует состояние средства измерений, чем применяемый метод измерений.

Грубой погрешностью или промахом называют погрешность результата отдельного измерения, входящего в совокупность измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда.

По способу выражения различают абсолютную, относительную и приведенную погрешности.

Абсолютная погрешность – погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины.

Относительная погрешность – погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности к действительному или измеренному значению измеряемой величины.

Приведенная погрешность – погрешность средства измерений, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины, постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона. Чаще всего при вычислении приведенной погрешности абсолютную погрешность относят к максимальному значению предела измерений.

В соответствии с условиями измерения различают статическую и динамическую погрешности.

Статическая погрешность – погрешность результата измерения, свойственная условиям статического измерения.

Динамическая погрешность – погрешность результата измерения, свойственная условиям динамического измерения.

С условиями измерения связана еще одна погрешность результата измерения – погрешность из-за неучтенного действия влияющих факторов (температура, давление, влажность и др.).

В погрешностях средства измерений условия измерения отражаются в разделении погрешностей на виды:

основную погрешность – погрешность средства измерения (СИ), применяемого в нормальных условиях (нормальные условия применения указываются в документации на СИ);

дополнительную погрешность – погрешность, возникающую в иных условиях измерений (например, рабочих и аварийных).

Обобщенная погрешность средства измерений обозначается термином «инструментальная погрешность» – это составляющая погрешности измерения, обусловленная погрешностью применяемого СИ.

Важной составляющей погрешности измерений, которая может проявлять себя как систематическая и как случайная, является погрешность метода измерений – погрешность, обусловленная несовершенством принятого метода измерений. Ее иногда называют теоретической погрешностью.

К погрешностям средства измерений относятся также погрешность меры – погрешность, равная разнице между номинальным значением меры и действительным значением воспроизводимой ею величины.

Применение СИ обусловливает целый ряд погрешностей в измерениях, связанных с такими характеристиками СИ, как порог чувствительности, смещение нуля, разрешающая способность, зона нечувствительности, дрейф показаний, гистерезис и др.

Погрешности средства измерений и погрешности результата измерений могут быть определены в результате их описания и оценивания или, иными словами, в результате обработки экспериментальных данных при измерениях.

2. МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Структурная схема измерений указывает на двойственный характер погрешности как отклонения от значения измеряемой ФВ: с одной стороны, погрешность несет информацию о результате измерения, с другой – об измеряемой ФВ.

Погрешности для оценивания описывают с помощью модели. Модель определяет характеристики погрешности. При обработке данных фактически получают оценки требуемых характеристик погрешности. Таким образом, оценивание погрешности можно рассматривать как процесс, состоящий из ее моделирования, описания и оценивания.

Выбор модели погрешности обусловлен как априорными, так апостериорными сведениями о её источниках. Модели разделяют на детерминистские и недетерминистские. Для случайных погрешностей справедливы недетерминистские модели, а для систематических – детерминистские.

В обобщенной форме погрешность измерения может быть описана основным уравнением измерения. Неидеальность измерительной процедуры, следствием которой является погрешность результата измерения, учитывается введением в уравнение измерения погрешностей всех его элементов:

$$\tilde{Q} = Q + \delta_{\tilde{Q}} = (q + \delta_q)\cdot([Q] + \delta_{[\tilde{Q}]}),$$

где $\delta_{\tilde{Q}}$ – погрешность результата; δ_q – погрешность нахождения числового значения измеряемой величины; $\delta_{[\tilde{Q}]}$ – погрешность реализации в данном измерении единицы ФВ.

Общая схема оценивания погрешностей выглядит следующим образом: выявление источников погрешности, их анализ, принятие модели погрешности, определение ее параметров, выбор методов оценки, оценивание.

Случайную погрешность описывают с помощью случайной величины, характеризуемой функцией распределения и её параметрами, в первую очередь – моментами. Параметры распределения находят методами математической статистики.

Неслучайную детерминированную погрешность описывают с помощью квазислучайных моделей, главным образом основанных на понятии нечеткого множества. Характеристики этой погрешности являются аналогами параметров распределений случайной величины.

Детерминированная погрешность описывается детерминированной функцией. Основные методы оценивания детерминированной погрешности – вычисление по известной формуле, выражающей детерминированную функцию погрешности, или нахождение области значений функции по заданному интервалу значений аргумента.

Важная проблема оценивания погрешности результата измерения – суммирование ее составляющих. Суммирование может быть как алгебраическим, так и геометрическим (сумма квадратов). Суммирование составляющих погрешности особенно затруднено в случаях, когда способы их оценивания различны.

2.1. Систематические погрешности

В отечественной метрологии систематические погрешности принято разделять на постоянные и переменные (монотонные и периодические). По причинам возникновения они могут быть методическими, инструментальными и субъективными (погрешность оператора).

Результат наблюдений, полученный при наличии систематической погрешности, называют неисправленным результатом.

2.1.1. Методы исключения систематических погрешностей

Систематическую погрешность следует либо исключить, либо, по возможности, учесть. Желательно устранять систематические погрешности не обработкой данных, а применением СИ, реализующих соответствующие методы измерений. Если это невозможно, систематические погрешности исключают введением поправок. Результат измерения, полученный после введения поправок, называют исправленным результатом. Если невозможно ввести все составляющие систематической погрешности, следует оценить границы неисключенной систематической погрешности (неисключенные остатки).

Постоянную систематическую погрешность нельзя найти методами совместной обработки результатов измерений и нельзя уменьшить многократными измерениями. Систематическая погрешность не искажает характеристик и параметров распределения случайной погрешности.

Действительно, пусть результат одного i-го измерения $x_i = x_д + +\Delta_i + \theta_i$, где $x_д$ – действительное значение измеряемой ФВ; Δ_i – случайная погрешность; θ_i – систематическая погрешность.

По n измерениям найдем среднеарифметическое значение результата измерений

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = x_д + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta_i .$$

Если систематическая погрешность θ постоянна во всех измерениях, то

$$\bar{x} = x_д + \theta + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta i.$$

Таким образом, постоянная систематическая погрешность не устраняется многократными измерениями. Постоянные систематические погрешности можно обнаружить лишь путем сравнения результатов измерений с другими, полученными с помощью более точных измерений. В то же время, существуют специальные методы уменьшения и исключения систематической погрешности в процессе производства измерений.

Метод замещения, когда сравнение осуществляется заменой измеряемой величины известной величиной. Для его реализации необходимо иметь регулируемую меру, величина которой однородна измеряемой, например, применение при измерении сопротивления постоянному току магазина сопротивлений.

Метод компенсации по знаку, при котором измерение выполняют дважды и проводят так, чтобы постоянная систематическая погрешность прибавлялась в каждом измерении с разными знаками, например, измерение сопротивления цепи, в которой действует источник ЭДС или тока, в прямом и обратном направлениях.

Метод противопоставления, при котором измерение выполняется дважды и проводится так, чтобы в обоих случаях причина постоянной погрешности оказывала разные, но известные по закономерности воздействия на результаты наблюдений, например, определение сопротивления R_x методом противопоставления приведенный на рис.2.1. Во втором измерении меняются местами R_x и R_2.

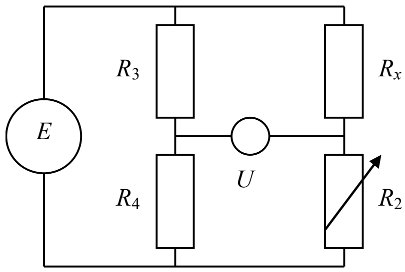


Рис.2.1. Определение сопротивления методом противопоставления

Условие равновесия моста $R_x/R_2 = R_3/R_4$,
1-е измерение: $R_x = R'_2\ (R_3/R_4)$,
2-е измерение: $R_x = R''_2\ (R_4/R_3)$.

Результат: $R_x = \sqrt{R'_2 R''_2}$.

Для измерения переменных и монотонно изменяющихся систематических погрешностей также существует несколько приемов:

- анализ регулярности или закономерности чередования знака отклонения в последовательности измерений;

- графический способ, заключающийся в том, что строится последовательность неисправленных результатов. Если в изменчивости результатов наблюдается закономерность, то она обусловлена непостоянной систематической погрешностью;

- симметричные наблюдения. В этом способе до и после измерения величины на вход СИ подается один и тот же калиброванный сигнал (мера). Предполагается, что в промежуток времени между 1-м и 3-м измерениями систематическая погрешность изменялась по линейному закону.

Первое измерение: $y_1 = kx_0 + y_0$ (x_0 – мера).
Второе измерение: $y_2 = kx + \Delta k\Delta tx + y_0$ (x – измеряемая ФВ).
Третье измерение: $y_3 = kx_0 + 2\Delta k\Delta tx_0 + y_0$.
Из этих трех измерений следует:

$$x = \frac{y_2 - y_0}{\dfrac{y_1 - y_0}{x_0} + \dfrac{y_3 - y_1}{2x_0}} = \frac{2x_0(y_2 - y_0)}{y_1 + y_3 - 2y_0}.$$

При таком оценивании x отсутствует влияние систематической погрешности, меняющейся по линейному закону.

2.1.2. Статистические способы выявления систематических смещений результата измерений

Способ последовательных разностей (*критерий Аббе*) состоит в следующем. По результатам n измерений определяют:

среднее $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$;

дисперсию совокупности $\sigma^2[x] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$;

сумму квадратов последовательных разностей

$$Q^2[x] = \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2 ;$$

находят отношение $\nu = Q^2[x]/\sigma^2[x]$, называемое критерием Аббе. Если это отношение при заданной доверительной вероятности (или уровне значимости) больше критического значения (табличное значение), то применяется нулевая гипотеза о постоянстве центра группирования.

Следовательно, при производстве измерений не происходило систематического смещения результатов измерений.

Способ анализа дисперсий (*критерий Фишера*) заключается в том, что анализируют многократные измерения, состоящие из нескольких серий. В серии объединяют по примерно одинаковым влияющим факторам. Для каждой серии определяют среднее арифметическое, затем – среднее по всем сериям. И, наконец, вычисляют дисперсию средних значений. Эта дисперсия характеризует наличие систематических отклонений средних значений величины в сериях. Критерием оценки наличия систематических погрешностей является критерий Фишера $F=\sigma_1^2/\sigma_2^2$,

где $\sigma_1^2=\frac{1}{S-1}\sum_{j=1}^{s} nj\left(\bar{x}_j-\bar{x}\right)^2$, $\sigma_2^2=\frac{1}{N-S}\sum_{j=i}^{s}\sum_{i=1}^{nj}\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)^2$, *N* – количество измерений; n_j – количество результатов в *j*-й серии; *S* – количество серий;

$$\bar{x}_j=\frac{1}{nj}\sum_{i-1}^{nj} x_{ji}\ ;\ \bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{s} n_j\bar{x}_j\ .$$

Если полученное значение критерия Фишера меньше критического при заданном уровне значимости, то принимают гипотезу об отсутствии систематических смещений, вызываемых фактором группировки результатов по сериям.

Дисперсионный анализ очень эффективен для обнаружения и установления причины возникновения систематической погрешности.

При неизвестных законах распределения результатов применяют статистический критерий Вилкоксона.

В тех случаях, когда систематическая погрешность может быть вычислена, в результат вводят поправку.

Неисправленный результат многократных измерений с оценкой СКО S и средним арифметическим значением $\bar{x}$ равен: $Q=\bar{x}'+t_pS$, где t_p – критерий Стьюдента. После введения поправки $C\pm t_pS_c$ (C – среднее значение поправки, S_c – СКО поправки) исправленный результат

$$Q=\left(\bar{x}'+C\right)\pm t_pS_{\bar{x}}=\bar{x}\pm t_pS_{\bar{x}}\ ,$$

где $S_{\bar{x}}=\sqrt{S^2+S_c^2}$.

Таким образом, при введении поправки исправляется среднее значение величины и возрастает СКО среднего.

2.2. Случайные погрешности

Присутствие случайных погрешностей в результатах измерений легко обнаруживается из-за их разброса относительно некоторого значения. И результат измерения, и его погрешность могут рассматриваться как случайные величины. Для анализа случайных величин применяют статистические методы. Основная цель статистической обработки – отыскание параметров распределения случайной величины: значения, наилучшим образом описывающего искомую величину, а также характеристик рассеяния результата.

Интегральной функцией распределения $F(x)$ (рис.2.2) называют функцию, каждое значение которой для каждого x – вероятность того, что случайная величина $x_i \le x$: $F(x)=P\{x_i\le x\}$. Следствием этого определения является то, что вероятность нахождения случайной величины x в диапазоне от x_1 до x_2 равна $P\{x_1<x<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$.

Дифференциальной функцией распределения (рис. 2.2), или плотностью распределения вероятностей, называется функция $p(x)=dF(x)/dx$.

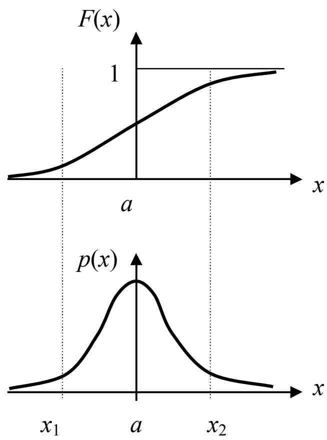


Рис.2.2. Пример интегральной $F(x)$ и дифференциальной $p(x)$ функций распределения случайной величины a

Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$, откуда $P\{x_1<x<x_2\}=\int_{x_2}^{x_1}p(x)dx$.

Распределение случайной величины характеризуется центром и моментом распределения.

Центр распределения. Медианой распределения называется значение $X_м$, при котором выполняется равенство $F(X_м)$ = = $\int\limits_{-\infty}^{X_м} p(x)dx$ = $\int\limits_{X_м}^{+\infty} p(x)dx$ =0,5.

Математическим ожиданием называется значение X, равное $\overline{X}=M[x]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$.

Математическое ожидание является центром тяжести распределения и совпадает с медианой в симметричных распределениях.

Максимум функции распределения $p(x)$ называется модой.

Функции распределения случайной величины могут быть одномодальными и двухмодальными.

В зависимости от функции распределения изменяется эффективность различных оценок центра. Так, например, для распределения Лапласа и островершинных распределений оценка $X_м$ эффективнее $\overline{X}$. Оценка центра в виде $\overline{X}$ вообще эффективна для одномодальных распределений. Для ограниченных распределений (не бесконечных), таких как равномерное, трапецеидальное и другие, применяется оценка в виде центра размаха $X_р=(x_1 + x_2)/2$.

При выборе оценки центра распределения помимо ее эффективности необходимо учитывать ее чувствительность к наличию промахов в совокупности исходных данных. Оценки вида $X_р$ и $\overline{X}$ чувствительны к промахам, особенно оценка $X_р$. Нечувствительны к промахам лишь квантильные оценки центра – медиана $X_м$ и центр сгибов $X_с$ (для двухмодального распределения), поскольку они не зависят от координат промахов.

Моменты распределений. Все моменты представляют собой некоторые средние значения, причем если усредняются величины, отсчитываемые от начала координат, то моменты называют начальными, а если от центра распределения, то центральными.

Начальные моменты порядка r определяют по формуле

$$\alpha_r[x]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^r p(x)dx .$$

Центральные моменты порядка r определяют по формуле

$$\mu_r[x]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)^r p(x)dx .$$

Нулевой начальный момент равен единице и отражает условие нормировки плотности распределения. С помощью этого же момента вводится понятие медианы.

Первый начальный момент – это математическое ожидание случайной величины $m_x=M[x]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx.$

Начальные и центральные моменты случайной погрешности Δ совпадают между собой, так как $M[\Delta]$ = 0, $\alpha_r[\Delta] = \mu_r[\Delta]$. Они же совпадают и с центральными моментами результата измерений $\mu_r[x]$.

Первый центральный момент случайной величины тождественно равен нулю, поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)p(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx-m_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=M[x]-m_x\equiv 0.$$

Второй центральный момент $\mu_2[x]$ характеризует рассеяние случайной величины относительно математического ожидания и называется дисперсией $D[x]$. Величину $\sigma=\sqrt{D[x]}$ называют средним квадратическим отклонением (СКО).

Третий центральный момент $\mu_3[x]$ характеризует асимметрию или скошенность распределения. Коэффициент асимметрии распределения определяется как $\nu=\mu_3[x]/\sigma^3$. Для нормального распределения ν = 0.

Четвертый центральный момент $\mu_4[x]$ характеризует остро- или плосковершинность распределения. Численно это выражается эксцессом: $\varepsilon=\mu_4[x]/\sigma^4$.

Диапазон значений эксцесса $1\leq\varepsilon<\infty$. Для нормального распределения ε=3.

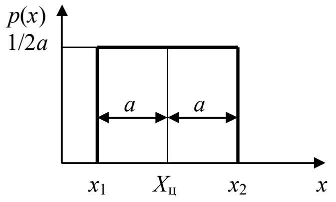
2.3. Основные законы распределения

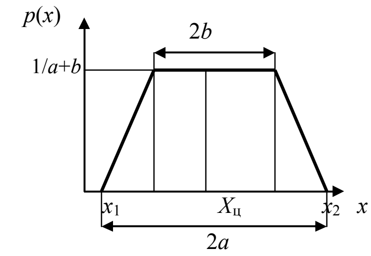
Фактические распределения погрешностей, когда-либо исследованные, намного превосходят 200. Почти 80% из них одномодальные и 20% – двухмодальные. Одномодальные распределения подразделяют на экспоненциальные, трапецеидальные, уплощенные, распределения Стьюдента.

2.3.1. Виды распределений

К трапецеидальным распределениям относятся: равномерные, собственно трапецеидальные и треугольное (Симпсона) (рис.2.3).

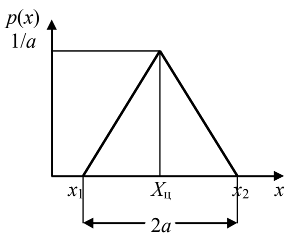
Во всех трапецеидальных распределениях $X_ц = (x_1 + x_2)/2$ одновременно является математическим ожиданием и медианой распределения. Мода треугольного распределения равна 1/2. СКО трапецеидального распределения $\sigma=\left(a/\sqrt{6}\right)\sqrt{1+\left(a/b\right)^2}$. При $a = 0$ (треугольное распределение) $\sigma=a/\sqrt{6}$, при $a = b$ (равномерное распределение) $\sigma=a/\sqrt{3}$.





$$p(x)=\begin{cases}0, x<X_ц-a, x>X_ц+a;\\ \dfrac{1}{2a}, X_ц-a\le x\le X_ц+a\end{cases}$$

$$p(x)=\begin{cases}0, x<X_ц-a, x>X_ц+a;\\ \dfrac{x-X_ц+a}{a^2-b^2}, X_ц-a\le x\le X_ц-b;\\ \dfrac{1}{a+b}, X_ц-b\le x\le X_ц+b;\\ \dfrac{X_ц+a-x}{a^2-b^2}, X_ц+b\le x\le X_ц+a\end{cases}$$



$$p(x)=\begin{cases}0, x<X_ц-a, x>X_ц+a;\\ \dfrac{x-X_ц+a}{a^2}, X_ц-a\le x\le X_ц;\\ \dfrac{X_ц+a-x}{a^2}, X_ц\le x\le X_ц+a\end{cases}$$

Рис. 2.3. Равномерное, трапецеидальное, треугольное распределения

Нормальным (распределением Гаусса) называется экспоненциальное распределение, в котором α=2:

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Важность нормального распределения для практики статистической обработки данных связана с центральной предельной теоремой: распределение случайных погрешностей по мере увеличения независимо действующих факторов приближается к нормальному.

Плотность вероятности *распределения Лапласа* описывается выражением

$$p(x)=\frac{1}{2}\exp(-|x|).$$

По мере уменьшения параметра $\alpha < 1$ в экспоненциальном распределении становятся все более пологими спады и оно по форме приближается к *распределению Коши*:

$$p(x)=\frac{a}{\pi\left(a^2+x^2\right)}.$$

Примеры экспоненциальных распределений приведены на рис.2.4.

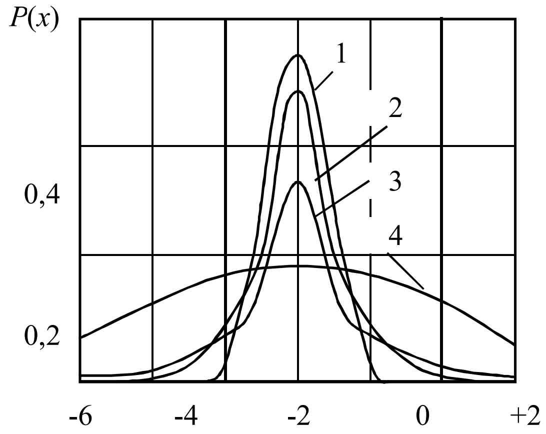


Рис.2.4. Примеры распределений: *1* – нормальное распределение (Гаусса); *2* – распределение Лапласа; *3* – распределение Коши; *4* – уплощённое распределение

Уплощенные распределения в отличие от экспоненциальных с α >> 2, форма которых по мере увеличения α всё более приближается к равномерному, являются суммой равномерного и экспоненциального распределений и имеют пологие спады по обе стороны почти плоской вершины (см. рис.2.4).

Распределения Стьюдента описывают плотность распределения вероятности среднего арифметического конечной выборки из n случайных отсчетов – части нормально распределенной генеральной совокупности. Эти распределения широко применяются в практике статистической обработки результатов многократных измерений. Параметры распределений Стьюдента зависят от числа степеней свободы $\nu = n$-1. Предельным случаем распределений Стьюдента при ν =1 является распределение Коши, а при $\nu \to\infty$ – распределение Гаусса. В центрированном и нормированном виде распределения Стьюдента описываются формулой

$$p(x)=\frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)}\left(1+x^2/\nu\right)^{-(\nu+1)/2}=S(x,\nu).$$

Особенности распределений Стьюдента: точечные оценки при малом числе степеней свободы не характеризуют распределения; для распределения Коши не существуют СКО и дисперсии (расходящийся интеграл) и не может быть сделана эффективная оценка центра распределения (для определения центра используют медиану).

Дискретное двузначное распределение – распределение, при котором равновероятно реализуются два значения случайной величины. В центрированном виде оно описывается формулой

$$p(x)=0{,}5\delta(x+a)+0{,}5\delta(x-a),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; ±a – возможные значения случайной величины. СКО распределения равно $\sigma = a$.

Арксинусоидальное распределение описывается формулой $p(x) = 1/(\pi\sqrt{A^2-x^2})$, где A – параметр распределения. СКО распределения равно $\sigma=A/\sqrt{2}$. Вид распределения приведен на рис.2.5.

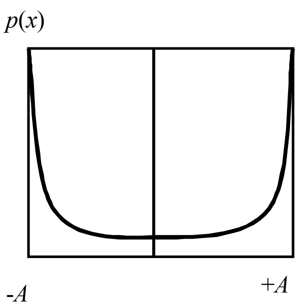


Рис.2.5. Арксинусоидальное распределение с

2.3.2. Оценки параметров распределения

Рассмотренные выше функции распределения описывают поведение непрерывных случайных величин. На практике мы имеем дело с дискретными величинами, поскольку в измерениях получаем отделимые друг от друга значения. Кроме того, число фиксируемых значений измеряемой величины не бесконечно. Таким образом, возникает задача оценки параметров распределений на основании выборок, т.е. ряда значений x_i, принимаемых случайной величиной x в n независимых измерениях. Число n называется объемом выборки. Выборка должна быть представительной, т.е. не должна искажать пропорций генеральной совокупности – теоретической выборки бесконечного объема.

Точечной оценкой параметра случайной величины называют его оценку по выборке. В отличие от самого параметра его точечная оценка сама является случайной величиной, и её значение зависит от объема выборки.

Точечная оценка должна обладать следующими свойствами:

• *несмещенностью.* Оценка $\hat{a}$ параметра a является несмещенной, если ее математическое ожидание равно искомому параметру: $\mathrm{M}\hat{a}=a$.

• *состоятельностью.* Оценка $\hat{a}$ называется состоятельной, если при увеличении объема выборки она стремится к искомому параметру: $P\{|\hat{a}-a|>\varepsilon\}\to 0,\ \varepsilon>0.$

• *эффективностью.* Оценка $\hat{a}$ называется эффективной, если она имеет минимальную дисперсию (в данном классе оценок).

Существуют различные методы получения оценок параметра: метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия, метод моментов.

Точечными оценками параметра называют среднее совокупности и ее СКО. Более наглядное, чем точечные оценки, представление о действительном значении параметра дают доверительные интервалы. *Доверительный интервал* строится на основе известной функции распределения. Искомый параметр представляют в виде неравенства $P\{l_1\le a\le l_2\}=P$.

Для описания точечных и интервальных оценок параметра требуется знать дифференциальную и интегральную функции распределения.

Точечной оценкой математического ожидания результата измерений является среднее арифметическое значение выборки $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

При любом законе распределения оно является состоятельной, несмещенной и эффективной (по критерию наименьших квадратов) оценкой.

Точечная оценка дисперсии, определяемая по формуле $\hat{D}[x]=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, является несмещенной и состоятельной.

Точечная оценка СКО не получается простым извлечением корня квадратного из оценки дисперсии, поскольку при этом оценка смещается. Для исправления оценки СКО вводится поправочный множитель $K(n)$, зависящий от объема выборки, $K(3)$ = =1,13; $K(\infty)\approx 1{,}03$. Оценка СКО $\hat{\sigma}=S_x=K(n)\cdot\sqrt{\hat{D}[x]}$.

Однако для практических расчетов часто пренебрегают смещенностью точечной оценки СКО, т.е. считают $K(n)$ = 1. Все точечные оценки могут принимать различные значения в различных сериях измерений и ведут себя как случайные величины. Их рассеяние оценивают с помощью СКО. Оценка среднего СКО среднего значения распределения равна:

$$S_{\bar{x}}=\frac{S_x}{\sqrt{n}}.$$

Для оценки СКО среднего квадратического отклонения оценки среднего применяют формулу

$$S_\sigma\approx\hat{\sigma}(S_x)=S_x\sqrt{\varepsilon-1}/\left(2\sqrt{n}\right).$$

Относительная погрешность определения СКО оценивается как $S_\sigma/S_x=\sqrt{\varepsilon-1}/2\sqrt{n}$, где ε – эксцесс распределения.

Точечные оценки других параметров распределений используются значительно реже. Оценки коэффициента асимметрии и эксцесса находят по формулам:

$$\hat{\nu}=\frac{1}{nS_x^3}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^3;\qquad \hat{\varepsilon}=\frac{1}{nS_x^4}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^4.$$

В ряде случаев важно убедиться в правильности предположения о законе распределения. В математической статистике известно несколько методов проверки нормальности распределения с применением критериев Фишера, Колмогорова и др.

Интервальные оценки параметров распределений. Точечные оценки параметров распределения становятся все менее надежными по мере уменьшения объема выборки. В этих случаях действительное значение измеряемой величины оценивают, определяя интервал (интервальные оценки), в границах которого с заданной вероятностью находится это значение. Такой интервал называется доверительным, а вероятность – доверительной.

При любом законе распределения случайной величины, обладающей моментами первого и второго порядков, верхняя граница вероятности попадания отклонения случайной величины x от центра распределения $X_ц$ в интервал tS_x описываются неравенством Чебышева

$$P\left\{\left|x-X_ц\right|\le tS_x\right\}\le 1-1/t^2.$$

Для нахождения доверительного интервала не требуется знать закон распределения результатов наблюдений, но должна быть известна оценка СКО. Неравенство Чебышева даёт слишком широкие доверительные интервалы, например, при P = 0,9 $t = \sqrt{10}$ и ширина доверительного интервала равна 3,16 S_x.

В метрологии применяют так называемые квантильные оценки доверительного интервала. Под 100P-процентным квантилем x_p понимают абсциссу такой вертикальной линии, слева от которой площадь под кривой плотности распределения вероятности равна P%. Иначе говоря, квантиль – это значение случайной величины с заданной доверительной вероятностью P. Например, медиана распределения является 50%-ным квантилем $x_{0,5}$.

На основании такого подхода вводится понятие квантильных значений погрешности, т.е. значений погрешности с заданной вероятностью P, которые определяют границы интервала погрешности $\pm\Delta\partial = \pm(x_p - x_{lp})/2$. Значения x_p находят по интегральной функции распределения $F(x_p)=P\{x_i<x_p\}$.

При малом объеме выборки, когда оценка СКО распределения ненадежна, пользуются распределением Стьюдента $S(t,к)$. С его помощью находят вероятность того, что отклонение среднего арифметического от действительного значения измеряемой величины не превышает $\Delta p = t_p S_{\bar{x}} = t_p S_x/\sqrt{n}.$ Коэффициенты Стьюдента (t_p) табулированы для различных значений P и степеней свободы $\nu = n-1$. Распределением Стьюдента пользуются при n < 30.

Существуют специальные приемы обработки результатов измерений при очень малых объемах выборки. Эффективные оценки дает, например, метод прямоугольных вкладов, который заключается в следующем: вычисляют параметры выборки $\bar{x}$ и S_x; все результаты наблюдений разбивают на m интервалов, $m \approx n^{0,4}$ с округлением до нечетного числа; методом прямоугольных вкладов восстанавливается эмпирическая функция распределения по числу интервалов m, если восстановленная гистограмма отличается от исходной, то уточняются $\bar{x}$ и S_x.

Для широкого класса экспоненциальных распределений ($\alpha\le 2/3$) вместо коэффициента Стьюдента может быть применен коэффициент

$$t=1{,}62\left[3{,}8(\varepsilon-1{,}6)^{2/3}\right]^{\lg\lg[1/(1-P)]},$$

где $0{,}9 \le P \le 0{,}99$, ε – эксцесс.

Результат измерения, записываемый в виде интервальной оценки, не является конкретным числом, а представляет собой интервал, внутри которого с вероятностью P находится значение измеряемой величины. Существование среднего значения интервала не означает, что искомое значение величины ближе к среднему, чем к остальным точкам интервала. Любое положение искомой величины равновероятно внутри указанного интервала.

2.4. Грубые погрешности (промахи)

Грубая погрешность или промах – это погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от результатов этого ряда.

Источниками грубых погрешностей могут быть непредсказуемые значительные изменения условий измерений (изменения значений влияющих факторов), нарушение условий эксплуатации СИ (условия окружающей среды, параметры питания, условия согласования измерительной цепи, повреждения измерительной линии и отказы СИ), а также ошибки оператора (неправильный отсчет, неправильная запись).

Грубые погрешности возникают при однократных измерениях и обычно устраняются повторными измерениями.

При многократных измерениях ошибочные отсчеты исключают. Эта процедура называется цензурированием выборки. Для обнаружения и исключения промахов используют статистические критерии, зависящие от закона распределения результатов наблюдений. Вопрос о том, содержит ли результат наблюдений грубую погрешность, решается общими методами проверки статистических гипотез. Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения x_i не содержит грубой погрешности, т.е. является одним из значений измеряемой величины. При этом задаются значением вероятности (или уровнем значимости) того, что сомнительный результат принадлежит данной совокупности.

Пользуясь определенными статистическими критериями, проверяют правомерность выдвинутой гипотезы. С точки зрения математической статистики промахи являются элементами другой генеральной совокупности, которые «загрязняют» анализируемую выборку.

Кратко рассмотрим критерии исключения грубых погрешностей.

Критерий «трех сигм» применяют для результатов, распределенных по нормальному закону. По этому критерию результат x_i считают промахом, если $|x_i - \bar{x}| > 3\sigma$. Проверку проводят последовательно, исключая из выборки промахи до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $|x_i - \bar{x}| < 3\sigma$. Правило «3σ» считается слишком жёстким, поэтому рекомендуется, в зависимости от объема выборки, использовать более мягкие критерии: при $6 < n \leq$ ≤ 100 – 4σ; при $100 < n \leq 1000$ – 4,5σ; при $1000 < n \leq 10000$ – 5σ.

Отметим, что использование подобных критериев для распределений, отличающихся от нормального, бессмысленно.

В общем случае границы цензурирования выборки $t_{гр}\sigma$ зависят от вида распределения. Для кругловершинных двухмодальных распределений (композиция дискретного двузначного и нормального) с эксцессом ε = 1,5 – 3, островершинных двухмодальных распределений (композиция дискретного двузначного и Лапласа) с ε = 1,5 – 6, композиций равномерного и экспоненциальных распределений с ε = 1,8 – 6, экспоненциальных распределений с ε = =1,5 – 6 можно приблизительно оценить $t_{гр}$:

$$t_{гр} = 1{,}55 + 0{,}8\sqrt{\varepsilon - 1}\,\lg(n/10).$$

Критерий Романовского применяют при $n < 20$. При выполнении неравенства $|x_i - \bar{x}|/\sigma < \beta$ значение x_i не считают промахом.

Значения критерия Романовского в зависимости от уровня значимости q приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Значения критерия Романовского $t_н$ в зависимости от числа измерений n и уровня значимости q

n	q		n	q	
	0,05	0,01		0,05	0,01
2	15,56	77,96	12	2,29	3,23
3	4,97	11,46	13	2,26	3,17
4	3,56	6,53	14	2,24	3,12
5	3,04	5,04	15	2,22	3,08
6	2,78	4,36	16	2,20	3,04
7	2,62	3,96	17	2,18	3,01
8	2,51	3,71	18	2,17	3,00
9	2.43	3,54	19	2,16	2,95
10	2,37	3,41	20	2,145	2,93
11	2,33	3,31	∞	1,96	2,58

Критерий Шарлье применяют при $n > 20$. При выполнении неравенства $|x_i - \overline{x}|/\sigma < K_ш$ значение x_i не считают промахом. Критерий Шарлье очень жесткий, и зачастую однократным отбрасыванием крайних значений ряда дело не ограничивается (см. пример 69).

Значения критерия Шарлье приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Значения критерия Шарлье

n	5	10	20	30	40	50	100
$K_ш$	1,30	1,65	1,96	2,13	2,24	2,32	2,58

По вариационному *критерию Диксона* анализируют вариационный ряд $x_1 < x_2 < x_3 < \dots .x_i < \dots .x_n$. $K_Д = (x_n - x_{n-1})/(x_n - x_1) < Z_q$. Значения Z_q в зависимости от объёма выборки n и доверительной вероятности P приведена в табл.2.3.

Таблица 2.3

Значения критерия Диксона

n	Z_q			
	0,10 (P = 0,90)	0,05 (P = 0,95)	0,02 (P = 0,98)	0,01 (P = 0,99)
4	0,68	0,76	0,85	0,89
6	0,48	0,56	0,64	0,70
8	0,40	0,47	0,54	0,59
10	0,35	0,41	0,48	0,53
14	0,29	0,35	0,41	0,45
16	0,28	0,33	0,39	0,43
18	0,26	0,31	0,37	0,41
20	0,26	0,30	0,36	0,39
30	0,22	0,26	0,32	0,34

Простым способом для обнаружения промахов является *критерий Граббса*

$$G_n = (x - \overline{x})/s,$$

где $\overline{x}$ – среднее значение. Оценка выборочного среднего находится по «истинным» данным либо $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$; s – выборочное среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Полученные значения G_n сравнивают с табличными значениями процентных точек критерия Смирнова-Граббса (табл. 2.4). Если $G_n > G_{кр}$, то проверяемое значение является выбросом. Недостаток критерия Граббса в том, что он не точен и не чувствителен к засорениям, группирующимся на расстоянии от общей совокупности.

Таблица 2.4

Процентные точки критерия Смирнова – Граббса

n	α = 0,10	α = 0,05	α = 0,025	n	α = 0,10	α = 0,05	α = 0,025
3	1,406	1,412	1,414	12	2,229	2,387	2,519
4	1,645	1,689	1,710	13	2,264	2,426	2,562
5	1,791	1,869	1,917	14	2,297	2,461	2,602
6	1,894	1,996	2,067	15	2,326	2,493	2,638
7	1,974	2,093	2,182	16	2,354	2,523	2,670
8	2,041	2,172	2,273	17	2,380	2,551	2,701
9	2,097	2,237	2,349	18	2,440	2,557	2,728
10	2,146	2,294	2,414	19	2,426	2,600	2,754
11	2,190	2,343	2,470	20	2,447	2,623	2,778

Кроме рассмотренных, в практике обработки результатов измерений применяют и другие критерии, например, Шовенэ, Тритьена, Мура.

Процедура исключения промахов на практике выглядит следующим образом. При известной дисперсии и СКО распределения σ для отбрасывания сомнительного результата применяется критерий $t = |x_{сомн} - x_{ср}|/σ$. Значение $x_{ср}$ определяют по всей выборке. Затем, задаваясь уровнем значимости $q = 1 - P$, находят табулированное значение $t_н$ для нормального распределения. Условие отбрасывания сомнительного результата: $t > t_н$. Когда значение σ неизвестно или число наблюдений мало ($n < 20$), более правильные результаты дает критерий Романовского, основанный на распределении Стьюдента. При применении этого критерия среднее значение и СКО определяют на выборке без сомнительного результата. Условие отбрасывания сомнительного результата: $|x_{сомн} - x_{ср}|/S > t_н$ – табулированного критерия, определяемого по уровню значимости и числу наблюдений.

Робастные методы. Приведенные выше методы предварительной обработки наблюдений и оценки характеристик результата измерений эффективны при нормальном законе распределения случайных погрешностей исправленного (без значимой систематической составляющей) результата. Зачастую у исследователя отсутствуют достаточные основания считать закон распределения нормальным, и, к тому же, довольно часто на практике реализуются иные законы распределения. В этих случаях среднее арифметическое уже не является оптимальной оценкой измеряемого значения величины, а дисперсия эмпирического распределения, получаемая известными методами статистической обработки, не характеризует рассеяние результатов наблюдений.

Для обработки данных, являющихся членами несимметричных и «загрязненных» (с утяжеленными хвостами) распределений, разработаны методы, позволяющие получать более надежные и устойчивые к выбросам оценки результатов измерений. К таким методам относятся методы робастного исследования. Они, в какой-то мере, – альтернатива методам исключения промахов (выбросов), осуществляемым при предварительной обработке наблюдений.

Исключение резко выделяющихся значений из общей совокупности может привести к удалению большого числа наблюдений, поэтому результат не будет соответствовать действительности. Эта проблема существенна при небольших объемах выборки.

Робастные методы оценивания, учитывающие наличие промахов (выбросов) и позволяющие при этом достаточно надежно оценивать параметры, характеризующие результат, хорошо развиты: методы Хубера, Винзора, Пуанкаре и др.

По *методу Пуанкаре* результаты наблюдений располагают в вариационный ряд и, отбрасывая по k крайних членов с каждого края ряда, получают усеченную выборку и усеченное среднее по формуле

$$T(\alpha) = \frac{1}{n-2k} \sum_{i=k+1}^{n-k} x_i ,$$

где k – число отброшенных значений, $k \le \alpha n$ – целая часть от произведения αn; n – объем выборки; α – некоторая функция засорения выборки ξ (табл. 2.5).

Таблица 2.5

Значения α для расчета устойчивых оценок $T(\alpha)$ – Пуанкаре

ξ	0	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,5	0,1	0,15
α	0	0,004	0,008	0,015	0,026	0,043	0,081	0,127	0,164
ξ	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,65	0,8	1	
α	0,194	0,222	0,247	0,291	0,332	0,386	0,436	0,5	

При $\alpha \to 0{,}5$ усеченное среднее стремится к медиане: med = x_{k+1} при нечетном n и med = $0{,}5(x_k + x_{k+1})$ при четном n.

По *методу Винзора* усеченное среднее определяют также с заранее известным α по формуле

$$W(\alpha)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=k+2}^{n-k-1} x_i + k(x_{r+1}+x_{n-k})\right),$$

По *методу Хубера* усеченное среднее вычисляют по формуле

$$\widehat{\theta}=\frac{1}{n}\Big(\sum_{|x_i-\theta|<k} x_i + (n_2+n_1)k\Big),$$

где $\widehat{\theta}$ – устойчивая оценка, устанавливаемая при помощи итеративных процедур; k – величина, которая допускается в качестве отклонения от центра совокупности, принимает постоянные значения с учетом удельного веса грубых ошибок в совокупности данных ξ; n_1, n_2 – численность группы наблюдений x_i, попадающих в интервал $(-\infty; \theta - k)$ и $(\theta + k; \infty)$ соответственно.

При расчетах по приведенной выше формуле начальной оценкой θ могут быть среднее арифметическое или медиана, оцененная по выборке. Затем на каждой итерации выборочную совокупность разделяют на три части. В одну часть попадают «истинные» признаковые значения, которые остаются без изменения ($|x_i - \theta| < k$). В две другие части совокупности (для $x_i > \theta + k$ и $x_i < \theta - k$) – «ошибки». Они не исключаются из рассмотрения, а заменяются соответственно на величины $x_i - k$ и $x_i + k$. По «истинным» и модифицированным данным каждый раз определяется новая оценка средней θ и итерация возобновляется. Итерации повторяются до тех пор, пока все наблюдения не оказываются в интервале «истинных» значений: $|x_i - \theta| < k$. Оценка по методу Хубера эффективна, но быстро теряет оптимальность с увеличением засорения выборки.

Непараметрические методы. Описание результатов измерений параметрическими методами основано на знании или обоснованном предположении о законе распределения погрешности. На практике широко распространены случаи, когда вынести определенное суждение о законе распределения результатов наблюдений невозможно. Для обработки получаемых при этом результатов и разработаны непараметрические методы, т.е. методы, не основанные на параметрах распределений. Непараметрические методы менее чувствительны к искажениям данных и промахам. Зачастую в технической литературе в качестве преимущества непараметрических методов перед параметрическими отмечается их относительная простота. На самом деле это не всегда так. Если вопрос о точечной оценке, устойчивой в выбросам, более-менее ясен, то обосновать достоверность интервальной оценки никак не удастся без предположения о законе распределения отклонений. В противном случае невозможно найти квантиль распределения для заданного уровня значимости.

Тем не менее, непараметрические методы широко используют на практике в качестве альтернативы параметрическим. Они основаны на анализе вариационного ряда. В качестве оценки центра распределения принимают выборочную медиану θ, т.е. среднее значение ряда, а доверительный интервал, характеризующий точность этой оценки, – по квантилям биномиального или (при большом числе наблюдений) нормального распределения.

Во втором случае доверительный интервал определяют как $(x_i; x_j)$, где i – наибольшее целое число меньше $(n + 1 - z_p\sqrt{n})/2$, а j – наименьшее целое число больше $(n + 1 + z_p\sqrt{n})/2$; z_p – квантиль, распределения Гаусса.

Объединение рядов наблюдений, определение средневзвешенного. На практике часто возникает потребность в объединении результатов нескольких групп измерений одной и той же величины.

Сравнение равноточности и однородности групп проводится по значимости отличий средних значений и дисперсий эмпирических распределений этих групп. На практике реализуются четыре варианта: 1-й: $X_{ср1} = X_{ср1}$; $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_1$; 2-й: $X_{ср1} \neq X_{ср1}$; $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_1$; 3-й: $X_{ср1} = =X_{ср1}$; $\sigma^2{}_1 \neq \sigma^2{}_1$; 4-й: $X_{ср1} \neq \underline{X}_{ср1}$; $\sigma^2{}_1 \neq \sigma^2{}_1$.

Равенство означает однородность значений среднего или дисперсий, т.е. принадлежность этих точечных оценок к одному распределению. В данном случае результаты наблюдений следует объединить и рассматривать их как одну выборку. Процедуры оценивания ничем не отличаются от обработки многократных равноточных наблюдений.

Неравенство дисперсий означает неравноточность измерений в рассматриваемых группах, а неравенство средних – значимость различий, связанных с тем, что, по крайней мере, в одной группе не исключена существенная систематическая погрешность или в разных группах измеряли разные значения величин, а не одну и ту же. В последнем случае объединение наблюдений лишено смысла, хотя обработка результатов, соответствующих вариантам 2 и 4 позволяет выявить присутствие в результатах неучтенной систематической составляющей погрешности или дрейф значения измеряемой величины (по разным причинам).

Вариант 3 имеет место при межлабораторных сличениях, применяется для выявления неисключенной систематической составляющей погрешности в какой-либо группе измерений, а также для контроля временной стабильности эталона. Другими словами, объединение неравнорассеянных групп измерений характерно для метрологической практики.

Средневзвешенное при неравноточных (неравнорассеянных) измерениях определяют по соотношению $\overline{X_0} = \sum_\iota \alpha_\iota \overline{X_\iota} / \sum_\iota \alpha_\iota$, где α_i – вес среднего i-й группы измерений $\overline{X_\iota}$, $\alpha_i = 1/\sigma^2_{\overline{X_i}} = n_i/\sigma^2_i$. Весовой коэффициент для среднего значения группы $a_i = \alpha_i / \sum_i \alpha_i$ и средневзвешенное значение равно $\overline{X_0} = \sum_i a_i \overline{X_i}$.

Дисперсия распределения средневзвешенного $\sigma^2_{\overline{X_0}} = 1/\sum_i \alpha_i$. Доверительная погрешность $\Delta_{\overline{X_0}} = t\sigma_{\overline{X_0}}$. При объединении неравнорассеянных однородных групп коэффициент t определяют по-разному:

- по распределению Стьюдента при заданной доверительной вероятности и числе степеней свободы $k = n_{\min} - 1$, где $n_{\min}$ – минимальное число измерений в группах;
- по распределению Стьюдента при заданной доверительной вероятности и числе степеней свободы $k = N - m$, где N – суммарное число измерений по всем группам, а m – число групп;
- по распределению Стьюдента при заданной доверительной вероятности и числе степеней свободы k, вычисляемому по формуле

$$k = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{S^2_{\overline{X}_j}}\right)^2 \Bigg/ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j+1} \frac{1}{S^4_{\overline{X}_j}} - 2.$$

При обработке нескольких групп измерений рекомендуется убедиться в однородности или неоднородности дисперсий (принадлежности их к одному распределению генеральной совокупности), а затем и средних значений каждой группы. Однородность дисперсий двух групп проверяют по критерию Фишера: $\sigma^2{}_1/\sigma^2{}_2 < F(n_1 - 1;\ n_2 - 1;\ \alpha)$ – принимается гипотеза об однородности дисперсий. Для проверки однородности средних значений групп используют распределение Стьюдента с коэффициентом

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} < t_n\,(n_1 + n_2 - 2;\ P).$$

Дисперсионный анализ однородности рядов наблюдений, наряду с оцениванием закона распределения результатов наблюдений, выявления грубых ошибок и систематических отклонений, относят к предварительной обработке результатов, поскольку окончательный результат измерений может быть представлен лишь после проведения перечисленных выше действий.

2.5. Суммирование погрешностей

2.5.1. Общие правила

Определение результирующей погрешности по известным составляющим называют суммированием погрешностей. Суммирование составляющих погрешности – задача нетривиальная по следующим причинам:

- составляющие погрешности могут быть коррелированны (не независимы);
- законы распределения составляющих погрешности могут быть различными;
- суммирование приводит к деформированию закона распределения;
- не все составляющие погрешности ведут себя как случайные величины.

То, что погрешности значительно меньше измеряемой величины, позволяет упрощенно разделить погрешности на зависящие и не зависящие от значения измеряемой величины.

Погрешность, абсолютное значение которой постоянно во всем диапазоне измерений, называют аддитивной, или погрешностью нуля.

Погрешность, абсолютное значение которой пропорционально значению измеряемой величины, называют мультипликативной, или погрешностью чувствительности.

Коррелированными называют составляющие погрешности, взаимным влиянием которых друг на друга или их взаимной связью нельзя пренебречь.

При наличии корреляции между, например, двумя составляющими погрешности, характеризуемыми СКО σ_1 и σ_2, можно записать: $\sigma_1^2=\sigma_2^2 + \sigma_{\Delta 1}^2$, где $\sigma_{\Delta 1}^2$ характеризует рассеяния погрешности 1 при данном значении погрешности 2. При $\sigma_{\Delta 1}^2=0$ погрешности 1 и 2 пропорциональны друг другу. Количественно корреляция между погрешностями 1 и 2 выражается коэффициентом корреляции ρ, определяемым из соотношения $\rho^2+(\sigma_{\Delta 1}/\sigma_1)^2=1$.

При $\sigma_{\Delta 1}=0$ $\rho=\pm 1$ и погрешности 1 и 2 абсолютно коррелированны. При $\rho = 0$ $\sigma_{\Delta 1}=\sigma_1$ и погрешности 1 и 2 независимы.

Суммарная погрешность двух коррелирующих составляющих $\sigma_\Sigma=(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)^{1/2}$.

При $\rho = 0$ $\sigma_\Sigma=(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2}$, т.е. составляющие погрешности суммируются геометрически, как независимые случайные величины. При $\rho = \pm 1$ $\sigma_\Sigma=\sigma_1+\sigma_2$, т.е. составляющие погрешности суммируются алгебраически с учетом их знаков.

Решить задачу суммирования составляющих погрешности с учётом различных законов их распределений практически невозможно уже при трёх и более составляющих. Поэтому для практических целей важно найти такие характеристики составляющих погрешности, суммируя которые по определённым правилам (относительно них тоже необходимо достигнуть соглашения), можно было бы получить представительную оценку результирующей погрешности результата измерения. Упомянутыми характеристиками могут быть: СКО, эксцесс, энтропийный коэффициент и др. Наиболее широко применяется СКО. Все операции проводятся путем геометрического суммирования СКО составляющих. Это правомерно в той мере, в какой составляющие (иногда многочисленные) погрешности ведут себя как случайные величины. Суммирование СКО даёт результирующую точечную оценку погрешности. Для перехода к интервальной оценке Δ требуется обосновать использование того или иного коэффициента пропорциональности t в соотношении $\Delta = tS$ (S – оценка σ). Эта проблема еще более неоднозначна, чем суммирование точечных оценок составляющих погрешности, поскольку упомянутый коэффициент есть функция закона распределения результирующей погрешности, от исследования которого мы пытались уйти, как от очень сложной и трудоёмкой задачи.

Столь непростая и противоречивая задача – упростить оценивание погрешности без ущерба для её достоверности – на практике решается при соблюдении определенных правил, а именно:

- суммировать следует отдельные составляющие, а не суммы каких-либо из них, поскольку в процессе оценивания результирующей погрешности необходимо выявить и учесть их корреляционные связи;

• для каждой составляющей погрешности необходимо найти её СКО;

• все составляющие погрешности следует разделить на аддитивные и мультипликативные для их отдельного суммирования;

• составляющие погрешности следует разделить на группы: сильно коррелированные ($\rho \geq 0{,}7$) и слабо коррелированные ($\rho < 0{,}7$);

• внутри групп сильно коррелированных составляющих производится их алгебраическое суммирование;

• суммарные по этим группам и оставшиеся вне групп составляющие суммируются геометрически, как некоррелированные.

Если речь идёт о погрешности СИ в диапазоне измерений, то суммарная аддитивная погрешность определяет погрешность СИ в начале диапазона, а сумма аддитивной и мультипликативной – в конце.

Для упрощения вычислений без существенного ухудшения точности оценки погрешности допускается исключить из суммирования заведомо малые составляющие по приблизительным правилам: $\sigma_{min} < \sigma_{max}/5$ для одной составляющей; $\sigma_i(i=1\ldots4) < \sigma_{max}/8$ для четырех составляющих.

Переход от точечной оценки результирующей погрешности σ_Σ к интервальной, доверительной $\Delta_д = t\sigma_\Sigma$ или энтропийной $\Delta_э = = k\sigma_\Sigma$ осуществляется после вынесения суждения о законе распределения результирующей погрешности, исходя из которого выбирается квантильный множитель t или энтропийный коэффициент k.

При доверительной вероятности P=0,9 для широкого класса симметричных распределений (равномерное, треугольное, трапецеидальные, нормальное, экспоненциальные ($\alpha \geq 2/3$) и др.) справедливо равенство $\Delta = 1{,}6\ S_\Sigma$ (S_Σ – оценка σ_Σ). При P>0,9 интегральные функции разных законов распределений расходятся и универсального соотношения между Δ и S_Σ нет. Однако для экспоненциальных и трапецеидальных распределений применима аппроксимация

$$\frac{\Delta}{S_\Sigma} = t_p = 1{,}62\left[3{,}8(\varepsilon - 1{,}6)^{2/3}\right]^{\lg\lg\left[1/(1-P)\right]},$$

где ε – эксцесс распределения (ε = 1,8….6,0). Ее погрешность не превышает 4% для P = 0,9 – 0,99 и 8% для P = 0,9 – 0,999.

Для кругловершинных двухмодальных распределений (комбинация нормального и дискретного двузначного) при ε = 1,3….3,0 и P = 0,9 – 0,999 с погрешностью менее 10% справедлива аппроксимация

$$t_p = 1{,}6\left[36(1 + \lg(e - 1))\right]^{\lg\lg\left[1/(1-P)\right]},$$

Для островершинных двухмодальных распределений (комбинация распределения Лапласа и дискретного двузначного):

$$t_p = 1{,}23\left[1 + \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{2{,}5}}\lg\frac{0{,}175}{1 - P}\right].$$

При ε = 1,8….6,0 и P = 0,9 – 0,999 погрешность составляет 5%.

Для уплощенных распределений (комбинация экспоненциального α = 1/2 и равномерного) при ε = 1,8…6,0 с погрешностью 8% при P = 0,9 – 0,999

$$t_p = 1{,}56\left[1{,}12 + (\varepsilon - 1{,}8)^{0{,}58}/\sqrt{10}\right]^{\lg\left[0{,}1/(1-P)\right]}.$$

При нежелании производить вычисления по приведенным соотношениям можно пользоваться таблицами для соответствующих распределений.

Однако это не менее трудоемко, требует к тому же уточнения закона распределения погрешности, и, что самое главное, достигаемое при этом уточнение таковым может и не являться в силу принятых при оценивании составляющих погрешности и при их суммировании допущений и упрощений.

2.5.2. Суммирование систематических составляющих погрешности

Проявления составляющих систематической погрешности таковы, что некоторые из них могут быть исключены из результата наблюдения путем введения поправок. Сами поправки также известны с некоторой погрешностью. Составляющие, которые по каким-либо причинам не устранены введением поправок, называют неисключёнными составляющими систематической погрешности. Систематические составляющие по своему индивидуальному проявлению не являются центрированной случайной величиной, тогда как их совокупность с большой вероятностью ведет себя как совокупность случайных величин. Это позволяет обосновать их суммирование статистическими методами. Как и ранее, остается не проясненным вопрос о законах распределения составляющих погрешности и, следовательно, о законе распределения результирующей погрешности. Практический выход из положения такой: при известной интервальной оценке погрешности принимают равномерный закон ее распределения, при известной точечной оценке (СКО) – нормальный.

Из практики известно, что такой подход дает осторожные, но и не очень консервативные оценки погрешности результата измерений.

Практическое правило суммирования интервальных оценок систематических погрешностей заключается в том, что в качестве результирующей погрешности выбирают минимальное значение из двух:

$$\theta_\Sigma = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\theta_i^2}\,,\ \ \theta_\Sigma = \sum_{i=1}^{m}\theta_i .$$

Поправочный коэффициент k зависит от доверительной вероятности P и слабо от числа слагаемых m (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Значения коэффициента *k* при разном числе слагаемых *m*

P	m					Среднее значение k
	2	3	4	5	∞	
0,90	0,97	0,96	0,95	0,95	0,95	0,95
0,95	1,10	1,12	1,12	1,12	1,13	1,10
0,99	1,27	1,37	1,41	1,42	1,49	1,40

При $P > 0{,}99$ зависимость k от m становится существенной.

При большом числе слагаемых результирующая погрешность имеет практически нормальное распределение. Оценка дисперсии этого распределения равна сумме дисперсий составляющих: $S_\theta^2 = \sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i^2}{3}$. При заданной доверительной вероятности P интервальная оценка результирующей погрешности $\theta = t_p S_\theta$, где t_p – квантиль нормального распределения при уровне значимости $q = 1 - P$.

2.5.3. Суммирование составляющих случайной погрешности

Оценку СКО суммарной случайной погрешности находят из соотношения

$$S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}S_i^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\rho_{ij}S_iS_j}\quad (i \neq j).$$

Коэффициенты корреляции случайных составляющих погрешности ρ_{ii} образуют диагональную матрицу. На главной диагонали $\rho_{ii} = 1$, матрица симметрична, поэтому

$$S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}S_i^2 + 2\sum_{i<j}^{m}\rho_{ij}S_iS_j}\,.$$

Для упрощения расчетов составляющие, как уже отмечалось ранее, относят к коррелирующим ($|\rho_{ij}| > 0{,}7$) и некоррелирующим ($|\rho_{ij}| < 0{,}7$) и присваивают им значения $\rho=\pm1$ и $\rho=0$ соответственно.

Если, все же, есть потребность в точном учёте коэффициента корреляции между X_i и X_j , то его оценивают по соотношению

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{1}{m(m-1)S(\tilde{X}_i)S(\tilde{X}_j)} \cdot \sum_{k=1}^{m}(X_{ki} - \tilde{X}_i)(X_{kj} - \tilde{X}_j),$$

где $S(\tilde{X}_i)$ $S(\tilde{X}_j)$ – оценки СКО средних значений аргументов X_i и X_j.

Интервальная оценка случайной погрешности определяется квантилем нормального распределения для заданной доверительной вероятности (или уровня значимости): $\Delta_i = t_p S_i$. Это справедливо и для результирующей случайной погрешности.

Из приведенных выше соотношений видно, что отсутствие корреляции между составляющими случайной погрешности приводит к схеме их геометрического суммирования, а сильная корреляция – алгебраического. При отклонениях закона распределения результирующей случайной погрешности от нормального применяют соотношения между точечной и интервальной оценками погрешности, приведенные п. 2.3.2.

2.5.4. Суммирование случайных и систематических погрешностей

Для суммирования случайных и систематических погрешностей определены правила, закрепленные в нормативных документах. Схема суммирования зависит от соотношения между неисключённой составляющей систематической погрешности θ и СКО результата измерения S (случайная составляющая).

При $\theta < 0{,}8S$ пренебрегают систематической составляющей, тогда доверительная граница погрешности результата измерения $\Delta = = t_p \cdot S$.

При $\theta > 8\ S$ пренебрегают случайной составляющей, тогда $\Delta = \theta$.

Эти упрощающие правила обеспечивают погрешность оценки погрешности результата в пределах ±15%.

В случаях, когда одним из видов погрешности пренебречь нельзя, суммирование производят по одной из приводимых ниже схем.

1. $\Delta(P) = K[\theta(P) + \Psi(P)]$, где K – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности P и отношения $r = \theta/S$ (табл. 2.7); $\psi(P)$ – доверительная граница случайной составляющей погрешности; $\psi(P) = t_p S(\xi)$.

Таблица 2.7

Значения коэффициента *К*

P	r								
	0,8	1	2	3	4	5	6	7	8
0,95	0,76	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81
0,99	0,84	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

2. $\Delta(P) = K_\Sigma S_\Sigma$, где $S_\Sigma = \sqrt{S^2(\xi) + S^2(\vartheta)}$; $K_\Sigma = [\Psi(P) + \theta(P)]/[S(\xi) + S(\vartheta)]$; $S(\xi), S(\vartheta)$ – оценки СКО случайной и систематической составляющих соответственно; $\theta(P) = K\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\theta_i^2}$, K определяется как при суммировании систематических составляющих погрешности.

3.Если систематические составляющие постоянны и значительны, то рекомендуется суммирование проводить по схеме: $\Delta(P) = \theta(P) + \Psi(P)$, т.е. алгебраически.

3. ОБРАБОТКА ИЗМЕРЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

3.1. Прямые измерения с однократными наблюдениями

Прямые измерения с однократными наблюдениями характерны для технологического контроля производственных процессов и для разрушающих испытаний.

В оценивании погрешности однократных измерений важную роль играет априорная информация о достоверности модели объекта измерений и правильности определения характеризующей его измеряемой величины; методе измерений и его погрешности; соответствии метрологических характеристик СИ заявленным.

За результат прямого однократного измерения принимают найденную величину. До измерения должна быть получена априорная оценка составляющих погрешности. В отношении случайных составляющих обычно предполагается нормальный закон распределения, а систематических – равномерный.

Таким образом, погрешность прямого однократного измерения складывается из погрешности СИ, погрешности метода и погрешности оператора. На практике очень часто учитывают только первую из перечисленных составляющих.

Составляющие погрешности суммируют по правилам, рассмотренным в подразд. 2.5.

Отечественные НД (МИ 1552-86 ГСИ. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей результатов измерений) рекомендуют представлять погрешность прямого однократного измерения в виде доверительной погрешности. Однако, как мы уже отмечали ранее, эта схема описания погрешности не позволяет перейти к описанию неопределенности результата измерения. Поэтому желательно описывать погрешность однократного измерения подробнее, указывая ее составляющие.

Пример 1. Миллиамперметр класса точности 2 имеет предел измерений 150 мА. Определить предельно допускаемую погрешность, расширенную и суммарную стандартную неопределенность единичного измерения.

Решение. Предельно допускаемая погрешность равна $\Delta x_{пр}$ = =150·0,02 = 3 мА. Оценка расширенной неопределенности имеет то же значение U = 3 мА. Оценка суммарной неопределенности с учетом того, что предельная погрешность указана, скорее всего, для доверительной вероятности 0,997 («три сигмы»), равна u_C = = 3/3= 1 мА. Стандартные неопределенности по типу A и B оценить в данной ситуации невозможно.

Пример 2. Падение напряжения на сопротивлении R = 100 Ом измерено вольтметром с внутренним сопротивлением $R_{вн}$ = =1000 Ом. Оцените относительную методическую погрешность измерения падения напряжения на сопротивлении. Какую неопределенность можно оценить по этим данным?

Решение. Измеряемое вольтметром напряжение определяется по формуле

$$U_{изм} = U_R R_{вн}/(R + R_{вн}).$$

Относительная методическая погрешность измерения U_R равна

$\delta_{UR} = (U_{изм} - U_R)/U_R = -R/(R + R_{вн}) = -100/(100 + 1000) \approx -0,09.$

По приведенным сведениям можно оценить относительную стандартную неопределенность по типу B: u_B = 0,09.

Пример 3. Необходимо измерить массу m = 400 мг. Имеются электронные весы класса точности 0,1 с верхним пределом измерения 10 кг и класса точности 0,5 с верхним пределом измерения 2 кг. Обоснуйте выбор прибора, дающего более точный результат.

Решение. Пределы допускаемых основных погрешностей весов равны:

$$\Delta m_1 = \gamma m_н = \pm (0,1\cdot 10/100) = \pm 0,01 \text{ кг};$$

$$\Delta m_2 = \gamma m_н = \pm (0,5\cdot 2/100) = \pm 0,01 \text{ кг}.$$

При измерении на весах класса точности 0,1 относительная погрешность измерения массы 400 мг составит ± (10/400) = ± 0,025 и на весах класса точности 0,5 ± (10/400) = ± 0,025. Таким образом, в данном случае нельзя отдать предпочтение тем или иным весам.

Пример 4. Погрешность образцового прибора должна быть меньше нормируемой погрешности поверяемого прибора по меньшей мере в 3 раза. Каким должен быть класс точности образцового прибора, если его верхний предел измерения превышает верхний предел измерения поверяемого прибора класса 2,5 в 2 раза?

Решение. Класс точности образцового прибора $\gamma_{обр}$ определим из соотношения $\gamma_{обр} \leq m \cdot t \cdot \gamma_{пр}$, где m – коэффициент отношения предельных погрешностей образцового и поверяемого приборов; t – коэффициент отношения пределов измерения поверяемого и образцового приборов. В нашем случае $\gamma_{обр} \leq (1/3)(1/2)2{,}5 = 0{,}4$.

Пример 5. При проверке пригодности вольтметра класса точности 2,0 с пределом измерения 100 В методом сличения применен поверенный вольтметр класса точности 1,0 с таким же пределом измерений. Как можно повысить достоверность проверки?

Решение. Нормированная погрешность проверяемого прибора определяется по классу точности:

$$\Delta V_{н} = 2{,}0 \cdot 100/100 = 2{,}0 \text{ В}.$$

В то же время допускаемая погрешность примененного для проверки прибора $\Delta V_{н} = 1{,}0 \cdot 100/100 = 1{,}0$ В.

Всего лишь в два раза меньше. Поэтому результаты проверки будут не очень надежными. Повысить их достоверность, с точки зрения правильности выводов об исправности или неисправности вольтметра, можно, уменьшив нормируемый при проверке диапазон предельной погрешности. Сделать это можно, вычитая из результата измерения погрешность «образцового» вольтметра. В нашем случае при одинаковых пределах измерений новый «суженный» диапазон погрешности определяется разницей классов двух вольтметров: 2,0 – 1,0 = 1,0. Следовательно, новый диапазон допускаемых отклонений показаний проверяемого вольтметра будет равен: 1,0·100/100 = 1,0 В вместо 2 В.

Пример 6. Двумя пружинными манометрами на 600 кПа измерено давление воздуха в герметичной камере. Класс точности первого манометра 0,5, второго 4. Первый показал 600 кПа, второй 590 кПа. Можно ли по этим результатам оценить действительное значение давления воздуха, в каком диапазоне значений оно может находиться с доверительной вероятностью 0,999? Какова погрешность второго манометра и соответствует ли она классу точности?

Решение. Действительное значение можно оценить по результату, полученному более точным манометром 600 кПа. Поскольку предельно допускаемая погрешность этого манометра равна $\delta_{1н}$ = =0,5·600/100 = 3,0 кПа, то с большой вероятностью значение давления воздуха $p_{д}$ находится в пределах 597 кПа $\leq p_{д} \leq$ 603 кПа.

Действительная погрешность измерения давления менее точным манометром равна $\delta_{2д}$ = 590 кПа – 600 кПа = – 10 кПа или –1,7%, а нормированная погрешность полученного в измерении результата для этого манометра равна $\delta_{2н} = 4 \cdot 600/590 \approx 4\%$.

Пример 7. К зажимам источника ЭДС E = 10 В с внутренним сопротивлением $R_{вн}$ = 1 Ом подключен вольтметр с входным сопротивлением $R_{вх}$ = 100 Ом. Определите показания вольтметра и вычислите погрешность, определяемую величиной его входного сопротивления; классифицируйте погрешность по источнику возникновения и характеру проявления. Какой вид неопределенности можно оценить по этим данным?

Решение. Напряжение, измеряемое вольтметром,

$$U_{изм} = ER_{вх}/(R_{вх} + R_{вн}) = 10 \cdot 100/(100 + 1) = 9{,}9 \text{ В}.$$

Абсолютная погрешность измерения Δ = 9,9 В – 10 В = – 0,1 В. По источнику происхождения погрешность является методической, а по характеру проявления – систематической.

По приведенным данным можно оценить стандартную неопределенность по типу B: u_B = 0,1 В. При определенных допущениях можно оценить и расширенную неопределенность, например, для равномерного закона распределения и P = 0,99 расширенная неопределенность будет равна U = 1,71·0,1 = 0,17 ≈ 0,2 В.

Пример 8. В цепь с резистором $R_н$ = 49 Ом и источником напряжения E = 10 В с $R_{вн}$ = 1 Ом подключен амперметр с пределом измерений 500 мА и входным сопротивлением $R_А$ = 1 Ом. Определите показания амперметра $I_А$, относительную погрешность δ его показания и оцените класс точности.

Решение. Ток, протекающий через нагрузочное сопротивление $I_н = E/(R_{вн} + R_н)$ = 0,2 А.

При подключении амперметра в цепь нагрузки происходит ее шунтирование и измеряемый амперметром ток $I_А = I_н R_н/(R_А + R_н)$ = =0,2(49/50) = 0,196 А. Если бы входное сопротивление амперметра было бесконечным, $I_А$=0,2 А. Следовательно, δ=(0,196– 0,200)/0,2= = – 0,02 (2%).

Класс точности амперметра γ оценим из неравенства: γ·0,5/100= = γ·0,005 ≤ |0,196 – 0,200| = 0,004. Тогда γ ≥ 0,005/0,004 = 1,25. Ближайшее значение из стандартного ряда γ = 1,5.

Пример 9. Определите относительную погрешность измерения на 30 делениях шкалы для прибора класса 0,5, имеющего шкалу 100 делений. Насколько эта погрешность больше погрешности на последнем – сотом делении шкалы прибора? Можно ли считать измерения на разных участках шкалы этого прибора равноточными?

Решение. Для прибора класса 0,5 относительная приведенная погрешность (на 100 делениях шкалы) $\delta_{пр}$ = 0,5·100/100 = 0,5%. Относительная погрешность измерения на 30 делений шкалы δ_{30} = =(0,5·100)/30 = 1,7%.

Равноточными называются измерения с одинаковой абсолютной погрешностью. На 100 делениях шкалы она равна 0,5 делений, и на 30 делениях она так же равна 0,5 деления. В этом приборе основная погрешность аддитивная, т.е. не зависит от показания прибора, поэтому ее относительная величина уменьшается с увеличением показаний: $\delta_{30} > \delta_{пр}$ более чем в 3 раза.

Пример 10. Известен класс прибора γ и верхнее значение диапазона измерений $A_н$. Измерено конкретное значение величины $A_{изм}$ с относительной погрешностью δ. Можно ли по этим данным восстановить измеренное значение величины? Какие составляющие неопределенности единичного измерения можно оценить по этим сведениям о приборе?

Решение. Абсолютная погрешность прибора $\Delta = \gamma A_н/100$, а относительная погрешность измерения конкретного значения величины $\delta = \gamma A_н/100A_{изм}$.

Откуда: $100\Delta = \gamma A_н = 100\delta A_{изм}$ и $A_{изм} = \Delta/\delta$.

В нашем случае можно оценить расширенную неопределенность и, при задании доверительной вероятности, суммарную стандартную неопределенность: $U = \Delta = \gamma A_н/100$ и $u_C = U_P/k$, где k равно 2 при P = 0,95 и 3 при P = 0,99 при нормальном законе распределения и 1,65 и 1,71 соответственно при равномерном.

Пример 11. Прибором первого класса точности (γ = 1) с верхним пределом диапазона измерений $U_н$ = 100 В измерено конкретное значение величины $U_{изм}$ с относительной погрешностью δ = =0,02. Можно ли по этим данным восстановить измеренное значение величины $U_{изм}$? Какие составляющие неопределенности единичного измерения можно оценить по этим сведениям о приборе?

Решение. Абсолютная погрешность прибора $\Delta = \gamma U_н/100$, а относительная погрешность измерения конкретного значения величины $\delta = \gamma U_н/100U_{изм}$.

Откуда: $100\Delta = \gamma U_н = 100\delta U_{изм}$ и $U_{изм} = \Delta/\delta$ = 50 В.

Расширенная неопределенность $U = \Delta = \gamma A_н/100$ = 1 В и, при задании доверительной вероятности, суммарная стандартная неопределенность $u_C = U_P/k$, где k равно 2 при P = 0,95 и 3 при P = 0,99 при нормальном законе распределения и 1,65 и 1,71 соответственно при равномерном.

Пример 12. Падение напряжения на участке электрической цепи сопротивлением R = 4 Ом измеряется вольтметром класса точности 0,5 с верхним пределом измерений 1,5 В. Измеренное значение равно 0,95 В. Измерение выполнено при температуре до 30°С ($\delta_{\text{доп}\,T}$ = ±0,3%) при наличии магнитного поля напряженностью 400 А/м ($\delta_{\text{доп н}}$ = ±0,75%). Сопротивление вольтметра R_v=1000 Ом. Определить исправленный результат измерений и погрешности.

Решение. Основная предельная относительная погрешность этого конкретного измерения

$$\delta = 0{,}5\cdot 1{,}5/100\cdot 0{,}95 = 0{,}007894 \approx 0{,}79\%.$$

Суммарная инструментальная погрешность $\delta_\Sigma = \sqrt{\sum_\iota \delta_\iota^2}$ = $(0{,}79^2 + 0{,}75^2 + 0{,}3^2)^{1/2}$ = 1,13% ≈ 1,1%; абсолютная погрешность Δ = = ±0,010 В.

Методическая погрешность измерения падения напряжения на сопротивлении R определяется соотношением между сопротивлениями участка цепи и входным сопротивлением вольтметра R_v:

$\Delta_{\text{мет}} = -\,U_R R/(R + R_V) = -\,0{,}95\cdot 4/(4+1000) = 0{,}0038 \approx 0{,}004$ В.

Оцененная методическая погрешность является систематической со знаком «+» и должна быть учтена в результате измерения в виде поправки. Исправленный результат измерения с учетом поправки $U_{R\text{испр}}$ = 0,954 В.

Окончательный результат измерения записываем в виде U_R = =0,954 ± 0,010 В, P = 0,95.

Пример 13. Выполнено однократное измерение падения напряжения на участке электрической цепи сопротивлением R = =10 Ом с помощью вольтметра класса 0,5 с верхним пределом диапазона измерений 1,5 В и входным сопротивлением R_V = 900 Ом. Показания вольтметра U_V = 0,975 В. Измерение проведено при температуре 25°С (δ_T = 0,5%) и возможном магнитном поле, имеющем напряженность до 300 А/м (δ_H = 0,5%). Вычислить инструментальную и суммарную погрешности результата измерения, а также оценить расширенную и суммарную неопределенности измерений.

Решение. Показание вольтметра связано с падением напряжения на сопротивлении соотношением $U_V = U_R R_V/(R + R_V)$. Методическая погрешность $\Delta_{\text{м}} = U_V - U_R = -U_R R/(R + R_V) \approx -0{,}011$ В. Следовательно, в результат измерения необходимо ввести поправку и получить исправленный результат измерения:

$$U_R = U_V + 0{,}011 = 0{,}975 + 0{,}011 = 0{,}986 \text{ В}.$$

Инструментальная составляющая погрешности определяется основной и дополнительной погрешностями.

Основная погрешность оценивается по приведенной погрешности и результату измерения:

$$\delta_0 = 0{,}5\cdot 1{,}5/0{,}986 = 0{,}76\%.$$

С учетом дополнительных погрешностей доверительные границы инструментальной погрешности при P=0,95 и ее равномерном распределении находят по формуле

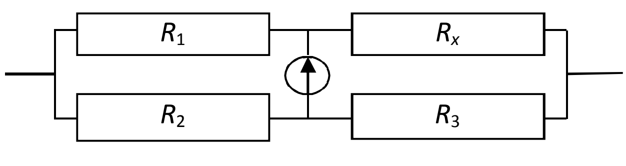
$\delta_{\text{и}} = (0{,}76^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2)^{1/2} = 1{,}04\% \approx 1{,}0\%$.

Окончательный результат можно записать следующим образом:

$$U_R = (0{,}986 \pm 0{,}010) \text{ В}; P=0{,}95.$$

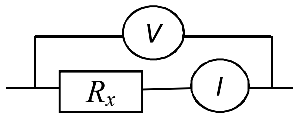
Расширенная неопределенность при P=0,95 равна $U_R = \Delta_{\text{и}}$ = = 10 мВ. Суммарная $u_C = U_{0,95}/1{,}65$ ≈ 6 мВ.

Пример 14. Сопротивление R_x измерено по мостовой схеме, показанной на рисунке. Для исключения систематической погрешности, обусловленной возможным неравенством сопротивлений R_2 и R_3 плеч моста, применен способ противопоставления, заключающийся в том, что балансировка моста проведена дважды: при указанном на рисунке расположении сопротивлений R_x и R_1 и после перемены их местами. В первом случае мост уравновешен при R_1 = 100,04 Ом, а во втором – при R_1 = 100,02 Ом. Номинальные значения сопротивлений плеч 2 и 3 одинаковы: $R_2 = R_3$ = = 100 Ом. Найти действительное отношение сопротивлений плеч 2 и 3 и систематическую погрешность при измерении R_x на позиции, показанной на рисунке.



Решение. Значение сопротивления с компенсированной систематической погрешностью из-за неравенства сопротивлений плеч равно: $R_x = (R_{x1} + R_{x2})/2$ = 100,03 Ом. Систематическая погрешность равна $R_{x1} - R_x = + 0{,}01$ Ом. Отношение сопротивлений плеч $R_2/R_3 = \sqrt{R_{x1}+R_{x2}} =$ 1,0001.

Пример 15. Сопротивление резистора R_x измерено по схеме, показанной на рисунке. Применены: вольтметр класса точности 0,5 с верхним значением диапазона измерений 100 В и амперметр класса точности 0,1 с верхним значением диапазона измерений 10 А. Получены показания приборов: $U_V = 75{,}0$ В, $I = 3{,}00$ А. Входное сопротивление амперметра $R_А$ = =0,2 Ом и вольтметра R_V =1000 Ом. Найти методические погрешности и записать результат измерений. Оценить неопределенности измерений.



Решение. Сопротивление участка цепи, на котором измерено падение напряжения, равно $R_{\sum} = R_x + R_А$. Показание вольтметра U_V связано с падением напряжения на сопротивлении $U_{R\sum}$ соотношением $U_V = U_{R\sum}R_V/(R_{\sum} + R_V)$.

Методическая погрешность измерения падения напряжения на сопротивлении $R_{\sum}$ равна $\Delta_м = U_V - U_{R\sum} = -U_{R\sum}R_{\sum}/(R_{\sum} + R_V) \approx$ $\approx(R_{\sum} << R_V) \approx -U_{R\sum}R_{\sum}/R_V$. В относительных единицах $\delta_м = - R_{\sum}/R_V$, где $R_{\sum} = U_V/\ I$ = 75/3 = 25 Ом. Тогда $\delta_м$ = 25/1000 = –0,025. Следовательно, абсолютная методическая погрешность измерения равна –25·0,025 = –0,625 Ом. Эта составляющая погрешности проявляет себя как систематическая и поэтому должна быть учтена путем внесения поправки в результат измерения: $R_{\sum испр}$ = 25 + 0,63 = =25,63 Ом. Откуда R_x = 25,63 – 0,2 = 25,43 Ом.

Значения предельно допускаемых относительных погрешностей результатов прямых измерений U и I:

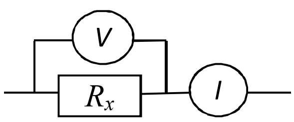
$\delta_{U,пр} = \pm\ 0{,}5/75 = \pm\ 0{,}0067$ или $\pm\ 0{,}67\%$;
$\delta_{I,пр} = \pm\ 0{,}01/3 = \pm\ 0{,}003$ или $\pm\ 0{,}3\%$.

Предельная суммарная относительная погрешность измерения сопротивления R_x $\delta_{R,пр} = (0{,}0067^2 + 0{,}003^2)^{1/2} = 0{,}00734$. Абсолютное значение предельной погрешности $\Delta_{Rпр}$ = 25,43·0,00734 = = ±0,19 Ом.

Таким образом, после округления результат косвенного измерения R_x запишем в виде R_x = (25,4 ± 0,2) Ом, $P \approx 1$.

Расширенная неопределенность измерений $U = \Delta_{Rпр} \approx 0{,}2$ Ом. Суммарная стандартная неопределенность при нормальном законе распределения $u_C = U/k = 0{,}2/3 \approx 0{,}07$ Ом.

Пример 16. Сопротивление резистора R_x измерено с помощью миллиамперметра и вольтметра по схеме, показанной на рисунке. Результаты прямых измерений напряжения U_V и тока I: (1,030±0,050) В, $P \approx 1$; (10,35±0,25) мА, $P \approx 1$. Входное сопротивление вольтметра R_V = 10,0 кОм. Найти результат косвенного измерения R_x, погрешности и оценить расширенную и суммарную стандартную неопределенности измерений.



Решение. Показание вольтметра U_V связано с падением напряжения на сопротивлении U_R соотношением $U_V = U_RR_V/(R_x + R_V)$.

Методическая погрешность измерения падения напряжения на сопротивлении R_x равна $\Delta_м = U_V - U_R = -U_RR_x/(R_x+R_V) \approx (R_x << R_V) \approx \approx -U_RR_x/R_V$. В относительных единицах $\delta_м = -R_x/R_V$. $R_x = U_V/I$ = =1,03/0,01035 = 99,52 Ом, тогда $\delta_м$ = –99,52/10000 = –0,00995.

Следовательно, абсолютная методическая погрешность измерения равна –99,52·0,00995 = –0,99 Ом. Эта составляющая погрешности проявляет себя как систематическая и поэтому должна быть учтена путем внесения поправки в результат измерения: $R_{x\,испр}$ =99,52 + 0,99 = 100,51 Ом. Значения предельно допускаемых относительных погрешностей результатов прямых измерений U и I:

$\delta_{U,пр} = \pm\ 0{,}05/1{,}035 = \pm\ 0{,}048$ или $\pm\ 4{,}8\%$;
$\delta_{I,пр} = \pm\ 0{,}25/10{,}35 = \pm\ 0{,}024$ или $\pm\ 2{,}4\%$.

Предельная суммарная относительная погрешность измерения сопротивления R_x $\delta_{R,пр} = (0{,}048^2 + 0{,}024^2)^{1/2} = 0{,}0537$. Абсолютное значение предельной погрешности $\Delta_{Rпр}$ = 100,51·0,0537 = ± 5,4 Ом.

Таким образом, после округления результат косвенного измерения R_x запишем в виде R_x = (100,5 ± 5,4) Ом, $P \approx 1$.

Расширенная неопределенность измерений $U = \Delta_{R\text{пр}} \approx 5{,}4$ Ом. Суммарная стандартная неопределенность при нормальном законе распределения $u_C = U/k = 5{,}4/3 \approx 1{,}8$ Ом.

Пример 17. Известно, что метод, применяемый для измерения физической величины, позволяет получать результат единичного измерения с $\sigma = 0{,}01$. Требуется оценить диапазон погрешности, который не будет превышен в 99 измерениях из 100. Описать измерения в терминах концепции неопределенности.

Решение. Предельная погрешность при уровне значимости 0,01 определяется по соотношению $\varepsilon = t\sigma$. Коэффициент $t = 2{,}6$ для функции Лапласа $\Phi(t) = 0{,}99$ (см. табл. П1), тогда $\varepsilon = 2{,}6\cdot 0{,}01 =$ $= 0{,}026 \approx 0{,}03$.

Стандартная неопределенность по типу A $u_A = \sigma = 0{,}01$. Если суммарная стандартная неопределенность $u_C \approx u_A = 0{,}01$, расширенная неопределенность при доверительной вероятности 0,99 будет равна $U = 3\cdot 0{,}01 = 0{,}03$.

Пример 18. Известно, что метод, применяемый для измерения физической величины, позволяет получать результат единичного измерения с $\sigma = 0{,}05$. Требуется оценить диапазон погрешности, который не будет превышен в 95 измерениях из 100. Описать измерения в терминах концепции неопределенности.

Решение. Предельная погрешность при уровне значимости 0,05 определяется по соотношению $\Delta = t\sigma$. Коэффициент $t = 1{,}96$ для значения функции Лапласа $\Phi(t) = 0{,}95$, тогда $\Delta = 1{,}96\cdot 0{,}05 =$ $= 0{,}098 \approx 0{,}1$.

Стандартная неопределенность по типу A $u_A = \sigma = 0{,}05$. Если суммарная стандартная неопределенность $u_C \approx u_A = 0{,}05$, то расширенная неопределенность при доверительной вероятности 0,95 будет равна $U = 2\cdot 0{,}05 = 0{,}1$ в единицах величины.

Пример 19. В свидетельстве о калибровке указано, что масса m_s эталона из нержавеющей стали с номинальным значением 1 кг составляет 1000,000325 г и что предельно допускаемая погрешность при доверительной вероятности 0,997 равна 240 мкг. Найти расширенную, суммарную и стандартную неопределенности по типу A.

Решение. Расширенная неопределенность эталона массы $U = =240$ мкг, суммарная $u_C(m_S) =$ (240 мкг)/3 = 80 мкг. Стандартная неопределенность по типу A или по типу B в данной ситуации не определяется.

Пример 20. В свидетельстве о калибровке указано, что сопротивление эталонного резистора R_s с номинальным значением 10 Ом есть 10,000742 Ом ± 129 мкОм при 23 ^{0}C и что упомянутая неопределенность 129 мкОм охватывает интервал с доверительной вероятностью 0,997. Определить: стандартную неопределенность, ее относительное значение и дисперсию.

Решение. Стандартную неопределенность можно принять как $u(R_s)$= (129 мкОм)/3 = 43 мкОм, что соответствует относительной стандартной неопределенности $u(R_s)/R_s = 4{,}3\ 10^{-6}$. Оцененная дисперсия $u^2(R_s)$= (43 мкОм)^2 = 1850 мкОм^2.

Пример 21. Результат измерений длины стержня записан в таком виде: $L(0{,}95) = (10{,}11\pm 0{,}04)$ мм. Оценить неопределенности единичного измерения по этим данным.

Решение. В предположении о нормальном законе распределения для возможных значений L, расширенная неопределенность может быть оценена как $U = 0{,}04$. Суммарная стандартная неопределенность $u_c = 0{,}04/2$ мм = 0,02 мм.

Пример 22. В справочнике указывается значение температурного коэффициента линейного расширения (ТКЛР) чистотой меди при 20^{0}С $\alpha_{20}(\text{Cu}) = 16{,}52\ 10^{-6}\ ^0\text{C}^{-1}$ и утверждается, что «погрешность этого значения не должна превышать $0{,}40\cdot 10^{-6}\ ^0\text{C}^{-1}$». Основываясь на предположении о равномерном распределении, оценить стандартную неопределенность измерения ТКЛР.

Решение. Предположение о равномерном законе распределения погрешности означает, что в измерениях преобладала систематическая погрешность (неисключенная составляющая систематической погрешности). Следовательно, расширенная неопределенность $U = 0{,}40\ 10^{-6}\ ^0\text{C}^{-1}$, а стандартная неопределенность при $P = =0{,}95$ $u_B = U/1{,}65 = 0{,}24\cdot 10^{-6}\ ^0\text{C}^{-1}$ и при $P = 0{,}99$ $u_B =$ $U/1{,}71 = =0{,}23\cdot 10^{-6}\ ^0\text{C}^{-1}$.

Пример 23. В справочнике приводится значение ТКЛР чистой меди $\alpha_{20}(\text{Cu}) = 16{,}52\cdot 10^{-6}\ ^0\text{C}^{-1}$ и утверждается, что наименьшее возможное значение $\alpha_{20}(\text{Cu}) = 16{,}40\cdot 10^{-6}\ ^0\text{C}^{-1}$, а наибольшее – $16{,}92\cdot 10^{-6\,0}\text{C}^{-1}$. Оценить неопределенность измерения α_{20} исходя из предположения о равномерном распределении.

Решение. Границы интервала асимметричны: $b_- = 0{,}12 \cdot 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$, $b_+ = 0{,}40 \cdot 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$. Тогда стандартная неопределенность по типу *B* $u_B = (b_+ + b_-)/2\sqrt{3} = 0{,}15 \cdot 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$.

Пример 24. В паспорте цифрового вольтметра указывается, что погрешность в диапазоне измерений 1 В равна показанию, умноженному на $14 \cdot 10^{-6}$ плюс диапазон, умноженный на $2 \cdot 10^{-6}$. В проведенных измерениях установлено, что среднее арифметическое ряда независимых повторных наблюдений *V* равно $V_{ср}$ = = 0,928571 В при стандартной неопределенности по типу *A* $u(V_{ср})$ = 12 мкВ. Оценить стандартную неопределенность единичного измерения по типу *B*, используя паспортные данные вольтметра, и суммарную стандартную неопределенность $V_{ср}$.

Решение. Исходя из предположения о симметричности и равномерности распределения $\Delta V_{ср}$ получим, что полуширина *a* симметричного прямоугольного распределения равна $a = (14 \cdot 10^{-6})$ (0,928571 В) + $(2 \cdot 10^{-6})$ (1 В) = 15 мкВ. Дисперсия при этом равна $u^2(\Delta V_{ср}) = a^2/3 = 75$ мкВ^2, а стандартная неопределенность по типу *B* $u(\Delta V_{ср})$ = 8,7 мкВ. Суммарная стандартная неопределенность получается суммированием стандартной неопределенности, равной 12 мкВ, вычисленной по типу *A*, со стандартной неопределенностью, равной 8,7 мкВ, вычисленной по типу *B*: u_c = 15 мкВ.

Пример 25. Результат определение *pH* молока по ГОСТ 26781 записан в следующем виде: *pH*(0,95) = 6,94 ± 0,04. Требуется оценить неопределенности измерения *pH*.

Решение. Расширенная неопределенность *U* = 0,04, суммарная стандартная неопределенность может быть примерно оценена как $u_C \approx 0{,}04/2 = 0{,}02$, так как коэффициент охвата 2 при нормальном распределении соответствует доверительной вероятности 0,954.

3.2. Прямые измерения с многократными наблюдениями

Прямые измерения с многократными наблюдениями – наиболее часто встречающаяся задача обработки данных. По взаимному соответствию погрешностей измерений различают равноточные и неравноточные измерения. Равноточные измерения характеризуются равенством СКО результатов между собой.

Последовательность обработки данных при прямых многократных измерениях:

1. Из всех результатов наблюдений исключают систематические составляющие погрешности и оценивают границы неисключённых остатков систематических составляющих.

2. Определяют точечные оценки распределения результатов наблюдений, для чего находят:

- среднее арифметическое значение $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,
- СКО результата измерения $S_x = \sqrt{\hat{D}[x]} = \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$,
- СКО среднего арифметического значения $S_{\bar{x}} = S_x/\sqrt{n}$.

3. Исключают промахи и уточняют точечные оценки по п.2. Для более надежной идентификации закона распределения находят моменты эмпирического распределения третьего (асимметрия) и четвертого (форма вершины) порядков.

4. Проводят идентификацию закона распределения результатов наблюдений. Для чего результаты наблюдений или их отклонений от среднего арифметического группируют в вариационный ряд. Разбивают ряд на *m* групп, как правило, с одинаковым интервалом группирования $h = (x_{max} + x_{min})/m$. Группировка наблюдений нужна для построения эмпирического распределения. Рекомендуется выбирать число групп из условия $0{,}55n^{0,4} < m < 1{,}25n^{0,4}$. Полученное значение *m* округляют до целого нечетного. При наличии явных признаков двухмодальности распределения, *m* увеличивают вдвое.

По числу наблюдений, попадающих в интервалы разбиения, строят эмпирическое распределение наблюдений (гистограмму и полигон).

При числе наблюдений *n* > 50 при идентификации закона распределения используют в качестве критерия согласия – критерий Пирсона (χ^2) или Мизеса–Смирнова (ω^2). При 15 < *n* < 50 применяют составные критерии по ГОСТ 8.207-76. «Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений». При *n* < 15 ГОСТ 8.207 не рекомендует проверять принадлежность эмпирического распределения к нормальному. В то же время, существуют методы анализа распределения при малых объемах выборок.

Вычисляемый критерий Пирсона должен быть меньше табличного значения (табл. 3.1) при заданных уровне значимости и числе степеней свободы $\nu = m - 1 - r$ (r=2 для нормального распределения – число оцениваемых параметров распределения):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - N_i)^2}{N_i} < \chi^2(q, \nu),$$

где n_i и N_i – число точек, попадающих в интервал разбиения i, экспериментальное и соответствующее данному закону распределения соответственно.

Если эмпирическое распределение удовлетворяет критерию Пирсона, нормальное распределение для данной статистики признается правдоподобным, но отнюдь не абсолютно верным.

Таблица 3.1

Значения критерия Пирсона χ^2 (q)

ν	q					
	0,99	0,95	0,90	0,10	0,05	0,02
2	0,02	0,10	0,21	4,61	5,99	7,82
6	0,87	1,63	2,20	10,65	12,59	15,03
10	2,56	3,94	4,87	15,99	18,31	21,16
20	8,26	10,85	12,44	28,41	31,41	35,02
30	14,95	18,46	20,60	40,26	43,77	47,96

5. Определяют доверительные границы случайной погрешности. После идентификации закона распределения результатов измерений определяют для заданной доверительной вероятности P квантильный множитель Z_p и доверительную границу случайной погрешности $\Delta = \pm Z_p S_{\bar{x}}$.

6. Определяют границы неисключённой систематической погрешности. Для целей последующего суммирования для неисключенных систематических погрешностей принимают тот же уровень доверительной вероятности, что и для случайных.

7. Определяют доверительные границы суммарной погрешности результата измерений. Правила суммирования случайных и систематических составляющих прямых измерений рассмотрены ранее (подразд. 2.5).

8. Представление (запись) результата измерения. Здесь следует руководствоваться правилами записи результата, рекомендуемыми действующими НД, например, ПМГ 96-2009 «Результаты и характеристики качества измерений. Формы представления».

3.2.1. Многократные равноточные независимые измерения

Пример 26. В отчете сообщается, что воспроизводимость кинематической вязкости мазута по ГОСТ 33-2000, определенная по результатам межлабораторных сличений с участием 10 лабораторий, составляет 7,4% при доверительной вероятности 0,95. Требуется оценить стандартную и расширенную неопределенности измерения кинематической вязкости при том же уровне доверия.

Решение. Так как воспроизводимость указана в терминах погрешности, то для определения СКО воспользуемся распределением Стьюдента (см. табл. П2): при P = 0,95 и числе степеней свободы $k = n$–1=10–1=9 коэффициент Стьюдента t = 2,26. Тогда СКО σ = 7,4%/2,26 = 3,27 ≈ 3,3%. Это же и есть относительная стандартная неопределенность. Расширенная неопределенность при коэффициенте охвата k = 2 U ≈ 2 (3,3%) = 6,6%.

Пример 27. Результат 30 измерений значения постоянного тока миллиамперметром записан в виде I = (25±3) мА, P = 0,95. Найти оценку СКО результата, а также оценить расширенную и суммарную стандартную неопределенности измерений.

Решение. По таблице коэффициентов Стьюдента при числе степеней свободы $k = n$–1 = 30–1 = 29 и доверительной вероятности P = 0,95 находим t = 2,042. Оценка СКО равна S ≈ 3/2,04 ≈ 1,5.

Расширенная неопределенность равна доверительной погрешности: U = 3 мА, а суммарная при коэффициенте охвата 2 (для P = 0,95) равна u_C = 3/2 = 1,5 мА.

Пример 28. Результат 25-и измерений значения постоянного тока миллиамперметром записан в виде I = (150±3) мА, P = 0,99. Найти оценку СКО результата, а также оценить расширенную и суммарную стандартную неопределенности измерений.

Решение. По таблице коэффициентов Стьюдента при числе степеней свободы $k = n–1 = 25–1 = 24$ и доверительной вероятности P = 0,99 t = 2,7. Оценка СКО $S \approx 3/2{,}7 \approx 1{,}1$. Расширенная неопределенность равна доверительной погрешности: U = 3 мА, а суммарная при коэффициенте охвата, равном трем (для P = 0,99), u_C = =3/3 = 1 мА для нормального закона распределения.

Пример 29. В 10 измерениях периода колебаний математического маятника получено значение СКО случайной составляющей погрешности единичного измерения S_i = 0,018 с. Неисключенная систематическая погрешность результата определяется предельной погрешностью секундомера θ = 0,01 с (P = 0,99). Оценить стандартные неопределенности по типу A, B, суммарную стандартную и расширенную неопределенности измерений.

Решение. СКО среднего значения периода колебаний $S_{ср}$ = =$0{,}018/n^{1/2} \approx 0{,}006$ с. Стандартная неопределенность по типу A u_A = 0,006 с. Стандартную неопределенность по типу B определим из характеристики секундомера: $u_B = \theta/k\sqrt{3}$ = (при $m < 4$ $k = 1$) = =0,01/1,732 ≈ 0,006 с. Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (0{,}006^2 + 0{,}006^2)^{1/2} = 0{,}0085 \approx 8$ мс. Расширенная неопределенность $U = 3\cdot 0{,}008 \approx 0{,}024$ с = 24 мс.

Пример 30. В пяти измерениях длины математического маятника получено значение СКО случайной составляющей погрешности единичного измерения S_i = 0,15 см. Неисключенная систематическая погрешность результата определяется предельной погрешностью линейки θ = 0,05 см (P = 0,99). Оценить стандартные неопределенности по типу A, B, суммарную стандартную и расширенную неопределенности измерений.

Решение. СКО среднего значения длины маятника $S_{ср}$ = =$0{,}15/n^{1/2}$ = 0,067 ≈ 0,07 см. Стандартная неопределенность по типу A u_A = 0,07 см. Стандартную неопределенность по типу B определим из характеристики линейки: $u_B = \theta/k\sqrt{3}$ = 0,05/1,732 ≈ ≈0,03 см при $m < 4$ $k = 1$. Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (0{,}07^2 + 0{,}03^2)^{1/2} = 0{,}076$ см ≈ 0,8 мм. Расширенная неопределенность $U = 3\cdot 0{,}076 = 0{,}228$ см ≈ 2 мм.

Пример 31. В таблице приведены результаты двадцати наблюдений сопротивления R_i резистора, проведенных в нормальных условиях.

i	R_i, Ом	i	R_i, Ом	i	R_i, Ом	i	R_i, Ом
1	8997	6	8993	11	8992	16	8993
2	8994	7	8994	12	8997	17	8991
3	8991	8	8995	13	8993	18	8994
4	8993	9	8995	14	8996	19	8996
5	8994	10	8993	15	8995	20	8994

При нормальном законе распределения случайных погрешностей найти доверительные границы случайной составляющей погрешности результата измерения при доверительной вероятности P = 0,95. Оценить качество измерений в терминах неопределенности, полагая, что неисключенная составляющая систематической погрешности пренебрежимо мала по сравнению со случайной погрешностью измерений.

Решение. Вычисляем ΣR_i = 179880 и среднее значение R = =179880/20 =8994 Ом. Вычисляем оценку СКО результата наблюдения, используя результаты вычислений $\Sigma(R_i – R)^2$ Ом² = 56 Ом², $S = \sqrt{56/19} \approx 1{,}72$ Ом. СКО результата измерения (среднего значения $R_{ср}$) $S_{ср} = 1{,}72/\sqrt{20} = 0{,}38$ Ом.

По таблице коэффициентов Стьюдента находим значение t для доверительной вероятности P=0,95 и числа наблюдений n=20: t = =2,09. Находим границы доверительного интервала случайной составляющей погрешности измерения: Δ =2,09·0,38 ≈ 0,8 Ом. Результат измерения сопротивления: R = 8994 Ом; $\Delta = \pm$ 0,8 Ом; P=0,95.

Оценка стандартной неопределенности по типу A равна оценке СКО случайной погрешности среднего значения $R_{ср}$: $u_A = S$ = =0,38 Ом. В пренебрежимой малости систематической составляющей погрешности оценка расширенной неопределенности равна U = 0,8 Ом, а оценка суммарной стандартной неопределенности при коэффициенте охвата k=2 u_C = 0,8/2 = 0,4 Ом, т.е. практически равна u_A.

Пример 32. Измерена емкость шести конденсаторов. Получены следующие результаты: 4,45; 4,40; 4,42; 4,45; 4,38; 4,42 пФ. Предполагая, что результаты измерений имеют нормальное распределение, найти доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание емкости конденсаторов с заданной доверительной вероятностью P = 0,95, считая σ неизвестной.

Решение. Определим среднее значение емкости и оценку СКО распределения:

$$\hat{a}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=4{,}42 \text{ пФ}; \quad \hat{\sigma}=S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}{6-1}}=0{,}028 \text{ пФ}.$$

Для определения доверительного интервала, накрывающего математическое ожидание, найдем по таблице квантилей распределение Стьюдента по заданной доверительной вероятности P = 0,95 и числу степеней свободы $\nu = n-1 = 6-1 = 5$: t = 2,571.

Вычислим предельную погрешность интервального оценивания математического ожидания

$$\varepsilon=t\frac{S}{\sqrt{n}}=2{,}571\frac{0{,}028}{\sqrt{6}}=0{,}029 \text{ пФ}.$$

Искомый доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание емкости конденсаторов с заданной доверительной вероятностью P = 0,95, равен:

$$\bar{x}-\varepsilon<a<\bar{x}+\varepsilon;$$

$$4{,}42 - 0{,}029 < a < 4{,}42 + 0{,}029;$$

$$4{,}391 < a < 4{,}449.$$

Пример 33. Измерена емкость шести конденсаторов (см. пример 32). Найти предельную погрешность, с которой среднее арифметическое значение оценивает математическое ожидание распределения a с доверительной вероятностью P = 0,99.

Решение. Из примера 32 $\hat{a}=4{,}42$ пФ, $\hat{\sigma}=0{,}028$ пФ.

При доверительной вероятности P = 0,99 предельная погрешность, с которой среднее арифметическое емкости конденсаторов $\bar{x}$ оценивает неизвестное математическое ожидание, равна:

$$\varepsilon=t\frac{S}{\sqrt{n}}=4{,}032\frac{0{,}028}{\sqrt{6}}=0{,}046 \text{ пФ}.$$

Пример 34. Измерена емкость шести конденсаторов (см. пример 32). Найти минимальное число конденсаторов, емкость которых надо измерить, чтобы с доверительной вероятностью P = 0,95 можно было утверждать, что среднее арифметическое правомерно принимать за математическое ожидание распределения с погрешностью, не превышающей $\varepsilon = 0{,}5\sigma$, принимая $\sigma = S$.

Решение. Из примера 32 $\hat{a}=4{,}42$ пФ, $\hat{\sigma}=0{,}028$ пФ.

Минимальное число конденсаторов, найдем из соотношения

$$n=\frac{S^2t^2}{\varepsilon^2}=\frac{0{,}028^2(1{,}96)^2}{(0{,}014)^2}\geq 16 \text{ конденсаторов.}$$

Пример 35. Измерено сопротивление 15 резисторов. Результаты приведены в таблице. Найти доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание распределения значений сопротивления с заданной доверительной вероятностью P = 0,95, считая σ неизвестным.

i – номер резистора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i – сопротивление резистора, кОм	5,8	6,2	6,0	5,9	6,1	5,7	6,0	6,5	5,6	5,8	5,5	6,2	6,3	6,4	6,0

Решение. Определим среднее значение емкости и оценку СКО распределения:

$$\hat{a}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}x_i=6{,}0 \text{ кОм}, \quad \hat{\sigma}=S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15}(x_i-\bar{x})^2}{15-1}}=0{,}28 \text{ кОм}.$$

При заданной доверительной вероятности P = 0,95 и числу степеней свободы $\nu = n$-1 = 15-1 = 14 найдем по таблице квантилей распределения Стьюдента коэффициент t = 2,145. Вычислим предельную погрешность интервального оценивания математического ожидания

$$\varepsilon = t\frac{S}{\sqrt{n}} = 2{,}145\frac{0{,}28}{\sqrt{15}} = 0{,}16 \text{ кОм.}$$

Искомый доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание емкости конденсаторов с заданной доверительной вероятностью P = 0,95, равен

$\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon$; 6,0 – 0,16 < a < 6,0 + 0,16; 5,84 < a < 6,16.

Пример 36. Еженедельные затраты времени на посещение библиотеки, определенные путем анкетирования, приведены в таблице. Принимая P = 0,99, найти предельную погрешность, с которой среднее арифметическое оценивает неизвестное математическое ожидание распределения значений x.

i – номер анкеты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i – затраты времени, ч	2,0	4,0	4,0	5,0	3,0	7,0	10,0	8,0	14,0	12,0	2,0	1,0

Решение. Определим среднее значение емкости и оценку СКО распределения:

$$\hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 6{,}0 \text{ ч}; \ \hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2}{12-1}} = 4{,}2 \text{ ч.}$$

При доверительной вероятности P = 0,99 предельная погрешность, с которой среднее арифметическое затрат времени $\bar{x}$ оценивает неизвестное математическое ожидание, равна:

$$\varepsilon = t\frac{S}{\sqrt{n}} = 3{,}106\frac{4{,}2}{\sqrt{12}} = 3{,}8 \text{ ч.}$$

Пример 37. Результаты 10 измерений индуктивности катушки приведены в таблице. Найти минимальное число измерений, которое необходимо, чтобы с доверительной вероятностью P = 0,99 и погрешностью, не превышающей $\varepsilon = 0{,}2S$, можно было принять среднее значение в качестве математического ожидания для нормального распределения x.

i – номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i – индуктивность, мГн	8,345	8,346	8,348	8,342	8,343	8,345	8,343	8,347	8,344	8,347

Решение. Определим среднее значение индуктивности и оценку СКО распределения:

$$\hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 8{,}345 \text{ мГн}, \ \hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2}{10-1}} = 0{,}0007 \text{ мГн.}$$

Минимальное число измерений

$$n = \frac{S^2 t^2}{\varepsilon^2} = \frac{0{,}0007^2 (2{,}5758)^2}{(0{,}00035)^2} \geq 34 \text{ измерений.}$$

Пример 38. В результате двух параллельных определений были получены значения процентного содержания хрома в эталоне: 4,50% и 4,70%. Требуется оценить процентное содержание хрома в эталоне (α) с надежностью 95%. Каковы расширенная и суммарная стандартная неопределенности измерений при нормальном и равномерном законах распределения отклонений?

Решение. Среднее по двум определениям содержание хрома в эталоне $x_{ср}$ = 4,60%. Оценка СКО: $S = [2\cdot 0{,}1^2/(2-1)]^{1/2}$ = 0,14%.

Найдем доверительный интервал для α. При P=0,95 и степени свободы k = 2–1 = 1 по таблице распределения Стьюдента находим t = 12,71.

Доверительное значение погрешности $\Delta_\alpha = 12{,}71\cdot 0{,}14 = 1{,}78 \approx \approx 1{,}8\%$. Следовательно, с доверительной вероятностью 95% процентное содержание хрома в эталоне заключено в интервале

$$(4{,}60 - 1{,}8)\% \leq \alpha \leq (4{,}60 + 1{,}8)\%.$$

Расширенная неопределенность равна: $U_\alpha = \Delta_\alpha$ = 1, 8%.

Суммарная стандартная неопределенность $u_C = U_\alpha/k$ (коэффициент охвата k при P = 0,95 равен 2 при нормальном законе распределения (u_C = 0, 9%) и 1,65 при равномерном (u_C = 1,1%).

Пример 39. С помощью оптиметра выполнено 10 последовательных измерений плоскопараллельной концевой меры длины и получены значения, указанные в таблице. Предельно допускаемая погрешность оптиметра Δ_0 = 0,1 мкм. Найти неопределенность измерений при доверительной вероятности 0,99 и предположении о равномерном законе распределения.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i, мкм	100,1	100,1	99,9	100,1	100,1	100,0	99,9	99,9	100,0	99,9

Решение. Среднее значение измерений $x_{ср}$ = 100,0 мкм. Стандартная неопределенность по типу *A*

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - x_{ср})^2} = 0{,}9 \text{ мкм.}$$

Стандартную неопределенность по типу *B* можно оценить по погрешности оптиметра: $u_B = \Delta_o/\sqrt{3}$ = 0,1/3 = 0,033 мкм.

Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2}$ = =0,9 мкм. Расширенная неопределенность при доверительной вероятности 0,99 и равномерном законе распределения

$$U_\alpha = k\, u_C = 1{,}71 \cdot 0{,}9 = 1{,}54 \approx 1{,}5 \text{ мкм.}$$

Пример 40. Обработка независимых многократных (n = 20) и равноточных наблюдений при калибровке образцовой меры длины дала такие результаты: $x_{ср}$ = 2,000 мм; θ = 0,005 мм и $S_{x\,ср}$ = =0,001 мм. Найти доверительные границы погрешности при P = =0,99. Оценить неопределенности измерений, сравнить с вычисленными погрешностями.

Решение. Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\, S_{x\,ср}$, где коэффициент Стьюдента при P = 0,99 и $k = n - 1$ = 19 равен 2,861; $\Delta_{сл}$ = 0,00286 мм.

Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей будет равна: $\Delta_{0,99}$= =$t_{сум}S_{сум}$, где $S_{сум} = \sqrt{S_{xср}^2 + \sum \theta_i^2/3}$, $t_{сум} = [tS_{xср} + \sum\theta_i]/[S_{xср} + \sqrt{\sum\theta_i^2/3}]$; $S_{сум}$ = 0,0031; $t_{сум}$ = 2,02; $\Delta_{0,99}$ = 0,0062 ≈ 0,006 мм.

Результат измерения длины образцовой меры запишем в виде $L_{обр}$ = (2,000 ±0,006) мм при P = 0,99.

Стандартная неопределенность по типу *A* $u_A = S_{x\,ср}$ = 0,001 мм.

Стандартная неопределенность по типу *B* $u_B = \theta/\sqrt{3}$ =0,0017 мм.

Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2} \approx \approx 0{,}002$ мм.

Расширенная неопределенность U = 3·0,002 = 0,006 мм практически не отличается от вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\Delta_{0,99}$ не смотря на то, что в нашем случае систематическая погрешность превышает случайную.

Пример 41. В многократных (n = 10), равноточных и независимых наблюдениях при калибровке секундомера получены такие результаты: $x_{ср}$ = 10,000 с; θ = 10 мс и $S_{x\,ср}$ = 1 мс. Найти доверительные границы погрешности при P = 0,99. Оценить неопределенности измерений. Сопоставить их с погрешностями.

Решение. Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\, S_{x\,ср}$, где коэффициент Стьюдента при P = 0,99 и $k = n - 1$ = 9 равен 3,25; $\Delta_{сл}$ = 3,25 мс.

Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей $\Delta_{0,99}$ = $t_{сум}$ $S_{сум}$, где $S_{сум} = \sqrt{S_{xср}^2 + \sum \theta_i^2/3}$, $t_{сум} = [tS_{xср} + \sum\theta_i]/[S_{xср} + \sqrt{\sum\theta_i^2/3}]$;

$$S_{сум} = 5{,}9 \text{ мс; } t_{сум} = 1{,}96;\ \Delta_{0,99} = 11{,}6 \text{ мс.}$$

Стандартная неопределенность по типу *A* $u_A = S_{x\,ср}$ = 1 мс.

Стандартная неопределенность по типу *B* $u_B = \theta/\sqrt{3}$ = 5,8 мс.

Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2}$ = = 5,9 мс – совпадает с суммарной погрешностью.

Расширенная неопределенность $U = 3 \cdot 5{,}9 = 17{,}7 \approx 18$ мс больше вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\Delta_{0,99}$ примерно в полтора раза. В нашем случае систематическая погрешность значительно превышает случайную (10/3,25 = 3,1)!

Пример 42. В многократных (n = 10), равноточных и независимых измерениях падения напряжения на прецизионном сопротивлении получены такие результаты: $x_{ср}$ = 10,000 Ом; θ = 1 мОм и $S_{x\,ср}$ = 10 мОм. Найти доверительные границы погрешности при P = 0,99. Оценить неопределенности измерений. Сопоставить их с погрешностями.

Решение. Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\, S_{x\,ср}$, где коэффициент Стьюдента при P = 0,99 и $k = n - 1 = 9$ равен 3,25; $\Delta_{сл}$ = 32,5 мОм.

Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей $\Delta_{0,99} = t_{сум}\ S_{сум}$, где

$$S_{сум} = \sqrt{S_{xср}^2 + \sum \theta_i^2/3},\ t_{сум} = [tS_{xср} + \sum \theta_i]/[S_{xср} + \sqrt{\sum \theta_i^2/3}];$$

$$S_{сум} \approx 10 \text{ мОм};\ t_{сум} = 3{,}17;\ \Delta_{0,99} \approx 31{,}7 \text{ мОм}.$$

Если мы пренебрежем систематической составляющей погрешности (так как отношение $\theta/\Delta_{сл} <$ 0,8), тогда $\Delta_{0,99} = \Delta_{сл}$ = 32,5 мОм. При округлениях до двух значащих цифр она равна значению, полученному выше.

Стандартная неопределенность по типу A $u_A = S_{x\,ср}$ = 10 мОм. Стандартная неопределенность по типу B $u_B = \theta/\sqrt{3} \approx$ 0,6 мОм. Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2} \approx$ $\approx$10 мОм.

Расширенная неопределенность $U = 3 \cdot 10$ = 30 мОм меньше вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\Delta_{0,99}$ примерно на 6% (31,7/30 = 1,06). В нашем случае случайная погрешность значительно превышает систематическую (32,5/1 = =32,5)!

Пример 43. В многократных (n = 10), равноточных и независимых измерениях падения напряжения на прецизионном сопротивлении получены такие результаты: $x_{ср}$ = 10,000 Ом; θ = 1 мОм и $S_{x\,ср}$ = 10 мОм. Найти доверительные границы погрешности при P = 0,95. Оценить неопределенности измерений. Сопоставить их с погрешностями.

Решение. Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\, S_{x\,ср}$, где коэффициент Стьюдента при P = 0,95 и $k = n - 1 = 9$ равен 2,262; $\Delta_{сл} = 22{,}6 \approx 23$ мОм.

Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей $\Delta_{0,95} = t_{сум}\ S_{сум}$, где

$$S_{сум} = \sqrt{S_{xср}^2 + \sum \theta_i^2/3},\ t_{сум} = [tS_{xср} + \sum \theta_i]/[S_{xср} + \sqrt{\sum \theta_i^2/3}];$$

$$S_{сум} \approx 10 \text{ мОм};\ t_{сум} = 2{,}27;\ \Delta_{0,95} \approx 23 \text{ мОм}.$$

Если мы пренебрежем систематической составляющей погрешности (так как отношение $\theta/\Delta_{сл} <$ 0,8), тогда $\Delta_{0,95} = \Delta_{сл}$ = 23 мОм, что совпадает со значением, приведенным выше.

Стандартная неопределенность по типу A $u_A = S_{xср}$ = 10 мОм.

Стандартная неопределенность по типу B $u_B = \theta/\sqrt{3} \approx$ 0,6 мОм.

Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_А^2 + u_В^2)^{1/2} \approx \approx$10 мОм.

Расширенная неопределенность $U = 2 \cdot 10$ = 20 мОм оказалась меньше вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\Delta_{0,95}$ примерно на 15%. В нашем случае случайная погрешность значительно превышает систематическую (23/1 = 23)!

Пример 44. В многократных (n = 10), равноточных и независимых наблюдениях при калибровке секундомера получены такие результаты: $x_{ср}$ = 10,000 с; θ = 10 мс и $S_{x\,ср}$ = 1 мс. Найти доверительные границы погрешности при P = 0,95. Оценить неопределенности измерений. Сопоставить их с погрешностями.

Решение. Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\, S_{x\,ср}$, где коэффициент Стьюдента при P = 0,95 и $k = n - 1 = 9$ равен 2,262; $\Delta_{сл} = 2{,}26 \approx 2{,}3$ мс.

Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей $\Delta_{0,95} = t_{сум}\ S_{сум}$, где

$$S_{сум} = \sqrt{S_{xср}^2 + \sum \theta_i^2/3},\ t_{сум} = [tS_{xср} + \sum \theta_i]/[S_{xср} + \sqrt{\sum \theta_i^2/3}];$$

$$S_{сум} \approx 5{,}9 \text{ мс};\ t_{сум} = 1{,}81;\ \Delta_{0,95} = 10{,}7 \approx 11 \text{ мс}.$$

Стандартная неопределенность по типу A $u_A = S_{xср}$ = 1 мс, по типу B $u_B = \theta/\sqrt{3} \approx$ 5,8 мс. Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2}$ =5,9 мс.

Расширенная неопределенность $U = 2\cdot5{,}9 = 11{,}8 \approx 12$ мс больше вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\Delta_{0,95}$ примерно на 5%. В нашем случае систематическая погрешность существенно превышает случайную (10/2,3 = 4,35).

Пример 45. Обработка независимых многократных (n = 20) и равноточных наблюдений при калибровке образцовой меры длины дала такие результаты: $x_{ср}$=2,000 мм; θ = 0,005 мм и $S_{x\,ср}$= 0,001 мм. Найти доверительные границы погрешности при P= 0,95. Оценить неопределенности измерений. Сравнить с погрешностями.

Решение. Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\ S_{x\,ср}$, где коэффициент Стьюдента при P = 0,95 и $k = n - 1$ = 19 равен 2,093; $\Delta_{сл}$ = 0,0021 мм.

Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей $\Delta_{0,95}$= $t_{сум}$ $S_{сум}$, где

$$S_{сум} = \sqrt{S_{xср}^2 + \sum\theta_i^2/3},\ t_{сум} = [tS_{xср} + \sum\theta_i]/[S_{xср} + \sqrt{\sum\theta_i^2/3}];$$

$$S_{сум} \approx 0{,}003 \text{ мм};\ t_{сум} = 1{,}82;\ \Delta_{0,95} \approx 0{,}005 \text{ мм}.$$

Результат измерения длины образцовой меры запишем в виде $L_{обр}$ = (2,000 ± 0,005) мм при P = 0,95.

Стандартная неопределенность по типу A $u_A = S_{x\,ср}$ = 0,001 мм, по типу B $u_B = \theta/\sqrt{3} \approx$ 0,0017 мм. Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A{}^2 + u_B{}^2)^{1/2} \approx$ 0,002 мм.

Расширенная неопределенность $U = 2\cdot0{,}002 = 0{,}004$ мм меньше вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\Delta_{0,95}$ примерно в 1,25 раза. Напомним, что в нашем случае систематическая погрешность превышает случайную.

Пример 46. Обработка независимых многократных (n = 15) и равноточных наблюдений при измерении диаметра вала дала такие результаты: $x_{ср}$ = 10,000 мм; θ = 0,005 мм и $S_{x\,ср}$ = 0,015 мм. Найти доверительные границы погрешности при P = 0,95. Описать результат в концепции неопределенности измерений. Сравнить с погрешностями.

Решение. Найдем доверительную границу случайной составляющей погрешности: $\Delta_{сл} = t\ S_{x\,ср}$, где коэффициент Стьюдента при P = 0,95 и $k = n - 1$ = 14 равен 2,145; $\Delta_{сл} \approx$ 32 мкм.

Суммарная доверительная погрешность с учетом равномерного распределения систематической составляющей $\Delta_{0,95}$= $t_{сум}S_{сум}$, где

$$S_{сум} = \sqrt{S_{xср}^2 + \sum\theta_i^2/3},\ t_{сум} = [tS_{xср} + \sum\theta_i]/[S_{xср} + \sqrt{\sum\theta_i^2/3}];$$

$$S_{сум} = 15{,}3 \approx 15 \text{ мкм};\ t_{сум} = 2{,}07;\ \Delta_{0,95} \approx 32 \text{ мкм}.$$

Результат измерения диаметра вала запишем в виде D = =(10,000 ±0,032) мм при P = 0,95. Стандартная неопределенность по типу A $u_A = S_{x\,ср}$ = 15 мкм, по типу B $u_B = \theta/\sqrt{3} \approx$ 3 мкм. Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A{}^2 + u_B{}^2)^{1/2}$ = 15,3 ≈ ≈15 мкм.

Расширенная неопределенность $U \approx 2\cdot15 = 30$ мкм меньше вычисленной ранее суммарной доверительной погрешности $\Delta_{0,95}$ примерно на 7%. Напомним, что в нашем случае случайная погрешность превышает систематическую.

Пример 47. В результате 20 равноточных и независимых измерений температуры в точке таяния льда получены значения среднего $t_{ср}$ = 273, 155 К и оценки дисперсии распределения S^2 = =$25\cdot10^{-6}$ К^2. По этим данным необходимо определить СКО случайной погрешности единичного измерения и среднего, предел допускаемой погрешности при уровне значимости q = 0,05, а также оценить неопределенности измерений и сопоставить их с погрешностями.

Решение. Оценка СКО единичного измерения $S = \sqrt{25}\cdot10^{-6}$= =0,005 К. СКО среднего $S_{ср} = S/\sqrt{20} \approx$ 0,001 К. Предельно допускаемая погрешность при доверительной вероятности $P = 1 - q$ = =0,95 равна Δ (P = 0,95) = tS. Коэффициент Стьюдента для числа степеней свободы 20–1 = 19 и P = 0,95 равен 2,093; $\Delta = 2{,}1\cdot0{,}001$ = =0,002 К. Результат измерения температуры в точке таяния льда: (273,155 ± 0,002) К, P = 0,95.

Стандартная неопределенность по типу A $u_A = S_{ср}$ = 0,001 К. Расширенная неопределенность при пренебрежимо малой систематической составляющей $U = 2\cdot0{,}001 = 0{,}002$ К, т.е. равна Δ.

Пример 48. По 100 равноточным и независимым измерениям постоянной величины получено значение дисперсии распределения относительной случайной погрешности σ^2 = 0,04. Определить, при какой вероятности относительная случайная погрешность среднего не превысит значений δ_1 = 0,04 и δ_2 = 0,06. Оценить неопределенности измерений.

Решение. СКО распределения равно σ = 0,2, СКО среднего $\sigma_{ср}$ = =0,2/$\sqrt{100}$ = 0,02. Вероятность того, что отличие среднего значения $x_{ср}$, полученного в многократных измерениях, от действительного значения постоянной величины *a* не превысит δ, определяется по интегральной функции Лапласа Φ(*t*): $P[|x_{ср} - a|<\delta] = \Phi(t)$. Коэффициент *t* вычисляют по формуле: $t = \delta/\sigma_{ср}$. В нашем случае для $\delta_1 = 0,04$ $t = 2$ и $P = 0,955$; для $\delta_2 = 0,06$ $t = 3$ и $P = 0,997$.

Стандартная неопределенность по типу *A* в относительных единицах $u_A = \sigma_{ср} = 0,02$. Расширенная неопределенность при пренебрежимо малой систематической составляющей $U \approx 2\cdot0,02$ = =0,04 для случая с $\delta_1 = 0,04$ и $U \approx 3\cdot0,02 = 0,06$ для случая с δ_2 = =0,06. Они практически полностью совпадают со значениями допускаемых погрешностей.

Пример 49. При исследовании показателей точности метода измерений произведено 20 наблюдений постоянной величины. Результаты показаны в таблице. Требуется оценить пригодность метода для однократных измерений с предельно допускаемой относительной погрешностью ± 0,005 при доверительной вероятности *P* = 0,9973.

i	*x*	*i*	*x*	*i*	*x*	*i*	*x*
1	238,39	6	237,65	11	237,56	16	237,39
2	238,12	7	237,61	12	237,55	17	237,28
3	237,92	8	237,59	13	237,54	18	237,16
4	237,80	9	237,58	14	237,51	19	237,04
5	237,71	10	237,57	15	237,48	20	236,75

Решение. Найдем среднее по выборке $x_{ср}$ = 237,56 и оценку СКО распределения $S = [\sum(x_i - x_{ср})^2/(n-1)]^{1/2} = \sqrt{2{,}43/19} \approx 0{,}36$. По таблице функции Лапласа Φ(*t*) = 0,9973 находим *t* = 3. Доверительный интервал относительной погрешности равен δ = = ± 3·0,36/237,56 = ± 0,00454, что меньше заданного значения ± 0,005. Следовательно, метод пригоден для однократных измерений с заданной предельной погрешностью.

Пример 50. При исследовании показателей точности метода измерений произведено 20 наблюдений постоянной величины. Результаты приведены в таблице примера 49. Требуется оценить доверительный интервал погрешности среднего 10 наблюдений, проводимых этим методом, при доверительной вероятности *P* = 0,999.

Решение. Найдем среднее по выборке $x_{ср}$ = 237,56 и оценку СКО распределения $S = [\sum(x_i - x_{ср})^2/(n-1)]^{1/2} = \sqrt{2{,}43/19} \approx 0{,}36$. Оценка СКО среднего 10 измерений $S_{ср10} = S/\sqrt{10} = 0{,}36/\sqrt{10} \approx$ ≈ 0,114. Для значения Φ(*t*) = 0,999 *t* ≈ 3,3. Следовательно, доверительный интервал погрешности среднего 10 наблюдений, проводимых этим методом, равен ± (0,114·3,3) ≈ ± 0,38 в единицах физической величины.

Пример 51. Из условий примера 49 требуется определить минимальное число наблюдений, проводимых этим методом, для получения допускаемой относительной погрешности среднего в диапазоне, не превышающем $\delta_{пр}$ ± 0,001 при доверительной вероятности *P* = 0,99 и ожидаемом значении среднего $x_{ср.ож}$ = 200 (известно из предварительных оценок).

Решение. Из примера 49 $x_{ср}$ = 237,56 и оценки СКО распределения $S \approx 0{,}36$. Требуемый диапазон предельно допускаемой погрешности равен ± 0,001·200 = ± 0,2. Для значения функции Φ(*t*) = =0,99 находим по таблице коэффициент $t \approx 2{,}6$. Тогда $S_{ср} = \delta_{пр}/t$ = =0,2/2,6 = 0,077. Поскольку $S_{ср} = S/\sqrt{n}$, то $n = (S/S_{ср})^2 \approx 22$ наблюдения.

Пример 52. Результаты 10 измерений длины металлического стержня приведены в таблице. Определить вероятность того, что погрешность среднего значения не выйдет за пределы $\delta_{пр}$ ± 0,05мм. Оценить неопределенности измерений.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L,мм	358,59	358,55	358,53	358,52	358,51	358,49	358,48	358,46	358,45	358,42

Решение. Найдем среднее значение длины $L_{ср}$ = 358,50 мм и СКО среднего $S_{ср} = \sqrt{0{,}023/(10\cdot9)} \approx$ 0,016 мм. Коэффициент *t* = $=\delta_{пр}/S_{ср}$ = 0,05/0,016 = 3,125 ≈ 3. Ему соответствует вероятность в распределении Стьюдента *P* = 0,985.

Стандартная неопределенность среднего по типу *A* $u_A = S_{ср}$ = =0,016, расширенная неопределенность для случая пренебрежимо малой систематической составляющей ($u_A >> u_B$) $U \approx$ 3·0,016 = =0,048 ≈ 0,05 мм.

Пример 53. В результате многократных прямых равноточных измерений физической величины *X* получены $X_{ср}$ = 1,01 и дисперсия распределения случайной погрешности σ^2 = 0,0004. Определить, с какой доверительной вероятностью относительная случайная погрешность результата единичного измерения ε не превысит ± 0,06. Оценить неопределенности единичного измерения.

Решение. Интервал погрешности $\varepsilon = \pm t\sigma$ Доверительную вероятность, с которой погрешность единичного измерения будет лежать в пределах этого интервала, находят по значению функции Лапласа $\Phi(t)$.

Найдем $t = \varepsilon/\sigma = 0{,}06/\sqrt{0{,}0004} = 3$. Для этого значения по таблице интегралов вероятностей $\Phi(3) = 0{,}9973$. То есть с вероятностью 0,9973 относительная погрешность единичного измерения не превысит ± 0,06.

Стандартная неопределенность по типу *A* $u_A = 0{,}02\cdot1{,}01 = =0{,}0202 \approx 0{,}02$ (в единицах измеряемой величины). Расширенная неопределенность в условиях пренебрежимой малости неопределенности по типу *B* равна $U \approx 3\cdot0{,}02 = 0{,}06$.

Пример 54. В результате 100 прямых равноточных измерений массы образцовой гири получена дисперсия распределения случайной погрешности $\sigma^2 = 0{,}000004$ кг^2. Определить, с какой доверительной вероятностью случайная погрешность результата среднего значения при многократных измерениях ε не превысит ± 0,5 г. Оценить неопределенности единичного измерения.

Решение. Интервал погрешности $\varepsilon = \pm t\sigma$ Доверительную вероятность, с которой погрешность будет находиться в пределах этого интервала, определяют по значению функции Лапласа $\Phi(t)$.

СКО среднего равно $\sigma_{ср} = \sqrt{\sigma^2/n} = 0{,}002/10 = 0{,}0002$ кг. Найдем $t = \varepsilon/\sigma_{ср} = 0{,}0005/0{,}0002 = 2{,}5$. Для этого значения по таблице интегралов вероятностей находим $\Phi(2{,}5) = 0{,}9876$. То есть с вероятностью 98,76% относительная погрешность измерения среднего значения массы этим методом при многократных измерениях не превысит ± 0,5 г.

Стандартная неопределенность единичного измерения по типу *A* $u_A = \sigma = 0{,}002$ кг. Расширенная неопределенность в условиях пренебрежимой малости неопределенности по типу *B* равна $U \approx 3\cdot0{,}002 = 0{,}006$ кг.

Пример 55. По десяти наблюдениям было вычислено значение массы эталона килограмма, полученное методом сличения с прототипом. Результаты вычисления следующие: $m_{ср} = 999{,}998721$ г, оценка СКО единичного измерения $S = 17\cdot10^{-6}$ г. Установить границы значений измеренной массы, в пределах которых при уровне значимости 0,01 находится истинное значение массы эталона. Оцените неопределенности, в том числе для условий поверки рабочих СИ сличением с данным эталоном, которому приписывается номинальное значение массы 1,000000 кг.

Решение. Вычислим оценку СКО среднего: $S_{m\,ср} = S/\sqrt{10} \approx \approx5\cdot10^{-6}$ г. Погрешность измерения среднего $\varepsilon = tS_{m\,ср}$. При доверительной вероятности $P = 0{,}99$ и числе степеней свободы $k = 10 - 1 = =9$ коэффициент Стьюдента $t = 3{,}25$. Вычислим $\varepsilon = 3{,}25\cdot5\cdot10^{-6} = =16\cdot10^{-6}$ г.

Истинное значение измеряемой величины с доверительной вероятностью 0,99 лежит в интервале $999{,}998705$ г $< a < 999{,}998737$ г.

Стандартная неопределенность по типу *A* $u_A = S_{m\,ср} \approx 5\cdot10^{-6}$ г. Поскольку значение, полученное в результате отклонение от эталона, равно – 0,001279 г, его можно принять за систематическое отклонение от прототипа, СКО которого равно $0{,}001279/\sqrt{3} = \quad = -0{,}00074$ г.

Если эталонной массе приписывается номинальное значение 1,000000 кг, то тогда стандартная неопределенность поверки рабочего СИ (гиря) по типу *B* будет равна $u_B = 0{,}00074$ г. Суммарная стандартная неопределенность $u_C = (u_A^2 + u_B^2)^{1/2} \approx u_B = 0{,}00074$ г. Расширенная неопределенность в предположении равномерного закона распределения и $P = 0{,}99$ равна $U = 3\cdot0{,}00074 = 0{,}00222 \approx \approx0{,}002$ г.

3.2.2. Объединение рядов наблюдений

Пример 56. Тремя группами исследователей с применением различных методов получены следующие значения ускорения свободного падения и СКО результата измерений: $g_1 = =981{,}9190\pm0{,}0004$; $g_2 =981{,}9215\pm0{,}0016$; $g_3 =981{,}923\pm0{,}002$ см·с$^{-2}$. Найти средневзвешенное значение g и его СКО.

Решение. Средневзвешенное при неравноточных (неравнорассеянных) измерениях определяют по соотношению $\overline{X_0} = \sum_{\iota} \alpha_{\iota} \overline{X_{\iota}} / \sum_{\iota} \alpha_{\iota}$, где α_i – вес среднего i-й группы измерений $\overline{X_{\iota}}$, $\alpha_i = 1/\sigma^2_{\overline{X_{\iota}}} = n_i/\sigma_i^2$. Весовой коэффициент для среднего значения группы $a_i = \alpha_i / \sum_i \alpha_i$ и средневзвешенное значение равно $\overline{X_0} = \sum_i a_i \overline{X_i}$.

Дисперсия распределения средневзвешенного $\sigma^2_{\overline{X_0}} = 1/\sum_i \alpha_i$.

Вычислим веса: $a_1 = 0{,}91$; $a_2 = 0{,}06$; $a_3 = 0{,}03$.

Средневзвешенное значение ускорения свободного падения равно: $0{,}91 \cdot 981{,}9190 + 0{,}06 \cdot 981{,}9215 + 0{,}03 \cdot 981{,}923 = 981{,}9193$ см$\cdot$ с$^{-2}$.

Дисперсия $S^2 = 14{,}5 \cdot 10^{-8}$см$^2 \cdot$с$^{-4}$; оценка СКО $S = 4 \cdot 10^{-4}$см$\cdot$с$^{-2}$.

Пример 57. Диаметр цилиндра измерен различным инструментом: штангенциркулем, микрометром, скобой-калибром и индикатором часового типа. Результаты измерений и характеристики точности приведены в таблице. Найти средневзвешенное значение диаметра цилиндра, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,01.

СИ	Штангенциркуль	Микрометр	Скоба-калибр	Индикатор часового типа
D, мм	9,95	10,015	10,00	10,01
Δ ± мкм	20	2	4	10
Число измерений	10	10	1	10

Решение. Формулы для вычисления $\overline{X}_0$, a_i и $\sigma^2_{\overline{X}_0}$ приведены в примере 56.

Вычислим веса: $a_1 = 0{,}086$; $a_2 = 0{,}348$; $a_3 = 0{,}218$, $a_4 = 0{,}348$.

Средневзвешенное значение диаметра вала $D = 10{,}010$ мм. Дисперсия $S^2 = 0{,}39$ мкм^2; оценка СКО $S = 0{,}6$ мкм.

Абсолютную погрешность средневзвешенного найдем из соотношения $\Delta_{\text{ср}} = tS$, где t – коэффициент распределения Стьюдента при числе степеней свободы k, определенной по формуле

$$k = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{S^2_{\overline{X}_j}} \right)^2 / \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j + 1} \frac{1}{S^4_{\overline{X}_j}} - 2;$$

$$\Delta_{\text{ср}} = (k = 40) = 2{,}57 \cdot 0{,}6 = 1{,}5 \approx \pm 2 \text{ мкм}.$$

Пример 58. В двух группах наблюдений линейного размера получены следующие результаты:

Номер группы	$X_{\text{ср}i}$	$S_{\text{ср}i}$	n_i
1	8,390 мм	0,02	10
2	8,360 мм	0,03	20

Найти средневзвешенное значение $X_{\text{ср}}$, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,01. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений.

Решение. Формулы для вычисления $\overline{X}_0$, a_i и $\sigma^2_{\overline{X}_0}$ приведены в примере 56.

Вычислим веса: $\alpha_1 = 2{,}5 \cdot 10^4$; $\alpha_2 = 2{,}2 \cdot 10^4$; $a_1 = 0{,}53$; $a_2 = 0{,}47$.

Средневзвешенное значение $X = 8{,}38$ мм. Дисперсия $S^2 = = 0{,}2110^{-4}$ мм^2; оценка СКО $S \approx 0{,}005$ мм.

Абсолютную погрешность средневзвешенного $\Delta_{\text{ср}} = tS$ определим по формулам из примера 57: $k = 26$; $t = 2{,}78$ при $P = 0{,}99$; $\Delta_{\text{ср}} = =2{,}78 \cdot 0{,}005 = 0{,}014$ мм $= 14$ мкм.

Результат оценки средневзвешенного значения: $X = (8{,}380 \pm \pm 0{,}014)$ мм, т.е. с доверительной вероятностью 0,99 значение средневзвешенного находится в пределах $8{,}366 \text{ мм} \le X \le 8{,}394$ мм.

Проверка однородности дисперсий: $(0{,}03/0{,}02)^2 = 2{,}25$. Критерий Фишера $F(9;19;\ 0{,}01) = 4{,}84$ (см. табл. П3, П4). Так как $2{,}25 < 4{,}84$ – дисперсии однородны.

Проверка однородности средних:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} < t_н\ (n_1 + n_2 - 2;\ P);$$

t = 3,1 > $t_н$ = 2,763 – средние неоднородны. По-видимому, в результате 8,360 мм содержится значимая составляющая систематической погрешности.

Пример 59. В трех группах наблюдений длины стержня получены следующие результаты:

Номер группы	$X_{срi}$, мм	$S_{срi}$	n_i
1	13,45	0,01	10
2	13,40	0,02	40
3	13,50	0,05	25

Найти средневзвешенное значение $X_{ср}$, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,05. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений.

Решение. Формулы для вычисления $\overline{X}_0$, a_i и $\sigma^2_{\overline{X}_0}$ приведены в примере 56.

Вычислим веса: α_1 = 10·10^4; α_2 = 10·10^4; α_3 = 10^4; a_1 = 0,476; a_2 = =0,476; a_3 = 0,048.

Средневзвешенное значение X_0 = 13,43 мм.

Дисперсия S^2 = 0,04810^{-4} мм^2; оценка СКО $S \approx$ 0,0022 мм.

Абсолютную погрешность средневзвешенного определяем по формулам из примера 57: k = 33; t = 2,58 при P = 0,99; $\Delta_{ср}$ = =1,96·0,0022 = 0,0057 мм ≈ 6 мкм.

Результат оценки средневзвешенного значения: X = (13,430 ± ±0,006) мм, т.е. с доверительной вероятностью 0,95 значение средневзвешенного находится в пределах 13,422 ≤ X ≤ 13,436.

Проверка однородности дисперсий по группам (см. пример 58):

Группы	S^2_i/S^2_j	F	Вывод
2-1	4	2,83	Неоднородны
3-2	6,25	1,80	Неоднородны
3-1	25	2,90	Неоднородны

Проверка однородности средних трех групп (см. пример 58): t = =7,6 > $t_н$ = 1,96 – средние неоднородны.

Пример 60. В двух группах наблюдений температуры в термостате получены следующие результаты:

Номер группы	$t_{срi}$, ^{0}С	$S_{срi}$	n_i
1	100,01	0,03	5
2	100,02	0,05	5

Найти средневзвешенное значение $t_{ср}$, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,01. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений.

Решение. $\overline{X}_0$, a_i и $\sigma^2_{\overline{X}_0}$ определяют по соотношениям из примера 56.

Вычислим веса: α_1 = 0,111·10^4; α_2 =0,04·10^4; a_1 = 0,735; a_2 = =0,265.

Средневзвешенное значение t_0 = 0,735·100,01 + 0,265·100,02 = =100,012 ^{0}С.

Дисперсия S^2 = 2,53·10^{-4} (^{0}С)^2; оценка СКО $S \approx$ 0,025 ^{0}С.

Абсолютную погрешность средневзвешенного $\Delta_{ср}$, число степеней свободы k определяем по формуле из примера 57: k = 8; t = =3,355 при P =0,99; $\Delta_{ср}$ = 3,355·0,025 = 0,0839 ≈ 0,084 ^{0}С.

Результат оценки средневзвешенного значения t = (100,012 ± ±0,084) ^{0}С, т.е. с доверительной вероятностью 0,99 значение средневзвешенного находится в пределах 99,928 ≤ t ≤ 100,096^{0}С.

Проверка однородности дисперсий по группам:

Группы	S^2_i/S^2_j	F	Вывод
2-1	2,8	16	Однородны

Проверка однородности средних (см. пример 58): t = 2,43 < $t_н$ = =3,355 – средние однородны.

Пример 61. В двух группах наблюдений температуры в точке плавления Ga получены следующие результаты:

Номер группы	$t_{срi}$, ^{0}C	$S_{срi}$	n_i
1	29,765	0,002	5
2	29,764	0,006	5

Найти средневзвешенное значение $t_{ср}$, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,05. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений.

Решение. $\overline{X}_0$, a_i и $\sigma^2_{\overline{X}_0}$ определяют по соотношениям из примера 56.

Вычислим веса: $\alpha_1 = 0{,}2510^6$; $\alpha_2 = 0{,}02810^6$; $a_1 = 0{,}9$; $a_2 = 0{,}1$.

Средневзвешенное значение $t_0 = 29{,}765$ ^{0}C.

Дисперсия $S^2 = 3{,}610^{-6}$ $(^0\text{C})^2$; оценка СКО $S \approx 1{,}910^{-3}$ ^{0}C.

Абсолютную погрешность средневзвешенного $\Delta_{ср}$, число степеней свободы k, определяем по формулам примера 57: $k = 5$; $t = =2{,}57$ при $P =0{,}95$; $\Delta_{ср} = 2{,}57\cdot 0{,}0019 = 0{,}00488 \approx 0{,}005$ ^{0}C.

Результат оценки средневзвешенного значения: $t = (29{,}765 \pm \pm 0{,}005)$ ^{0}C, т.е. с доверительной вероятностью 0,95 значение средневзвешенного находится в пределах: $29{,}760 \le t \le 29{,}770$ ^{0}C.

Проверка однородности дисперсий по группам:

Группы	S^2_i/S^2_{j}	F	Вывод
2-1	9	6,39	Неоднородны

Проверка однородности средних (см. пример 58): $t < 1 < t_н = = 2{,}306$ – средние однородны.

Пример 62. В двух группах измерений размера плоскопараллельной концевой меры длины получены следующие результаты:

Номер группы	$X_{срi}$, мкм	$S_{срi}$	n_i
1	100,1	0,1	5
2	99,9	0,5	10

Найти средневзвешенное значение $X_{ср}$, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,05. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений групп.

Решение. $\overline{X}_0$, a_i и $\sigma^2_{\overline{X}_0}$ определяют по соотношениям из примера 56.

Вычислим веса: $\alpha_1 = 100$; $\alpha_2 = 25$; $a_1 = 0{,}8$; $a_2 = 0{,}2$.

Средневзвешенное значение $t_0 = 100{,}06$ мкм.

Дисперсия $S^2 = 0{,}008$ (мкм)^2; оценка СКО $S \approx 0{,}09$ мкм.

Абсолютную погрешность средневзвешенного $\Delta_{ср}$, число степеней свободы k определяют по формулам примера 57: $k = 88$; $t = =1{,}96$ при $P =0{,}95$; $\Delta_{ср} = 1{,}96\cdot 0{,}09 = 0{,}176 \approx 0{,}2$ мкм.

Результат оценки средневзвешенного значения: $t = (100{,}06 \pm \pm 0{,}2)$ мкм, т.е. с доверительной вероятностью 0,95 значение средневзвешенного находится в пределах $99{,}86 \le t \le 100{,}26$ мкм.

Проверка однородности дисперсий по группам:

Группы	S^2_i/S^2_{j}	F	Вывод
2-1	25	8,79	Неоднородны

Проверка однородности средних (см. пример 58): $t = 0{,}7 < t_н = =2{,}3$ – средние однородны.

Пример 63. В двух группах измерений линейного размера детали получены следующие результаты:

Номер группы	$X_{срi}$, мм	n_i
1	$61{,}35 \pm 0{,}35$ $P = 0{,}95$	10
2	$61{,}65 \pm 0{,}15$ $P = 0{,}95$	10

Найти средневзвешенное значение $X_{ср}$, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,05. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений групп.

Решение. $\overline{X}_0$, a_i и $\sigma^2_{\overline{X}_0}$ определяют по соотношениям из примера 56.

Вычислим оценки СКО среднего: $S_{срi} = \Delta_{срi}/t$; $t = 2{,}26$; $S_{ср1} = =0{,}155$; $S_{ср2} = 0{,}066$.

Вычислим веса: $\alpha_1 = 41{,}6$; $\alpha_2 = 229{,}6$; $a_1 = 0{,}153$; $a_2 = 0{,}847$.

Средневзвешенное значение $X_0 = 61{,}605$ мм.

Дисперсия $S^2 = 36,9 10^{-4}$ мм^2; оценка СКО $S = 0,060810 \approx \approx 0,06$ мм.

Абсолютную погрешность $\Delta_{ср}$, число степеней свободы k определяем по формулам примера 57: $k = 13$; $t = 1,16$ при $P = 0,95$; $\Delta_{ср} = 2,16 \cdot 0,06 = 0,132$ мм.

Результат оценки средневзвешенного значения: $t = (61,605 \pm \pm 0,132)$ мм, т.е. с доверительной вероятностью 0,95 значение средневзвешенного находится в пределах: $61,473 \le t \le 61,737$ мм.

Проверка однородности дисперсий средних по группам:

Группы	S^2_i/S^2_j	F	Вывод
1-2	5,52	2,98	Неоднородны

Проверка однородности средних (см. пример 58): $t = 17 > t_н = = 2,1$ – средние неоднородны. В результате первой группы по-видимому содержится неисключенная систематическая погрешность.

Пример 64. В двух группах наблюдений температуры в точке затвердевания In получены следующие результаты:

Номер группы	$t_{срi}$, ^{0}С	$S_{срi}$	n_i
1	156,599	0,001	10
2	156,598	0,003	20

Найти средневзвешенное значение $t_{ср}$, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,01. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений.

Решение. $\overline{X}_0$, a_i и $\sigma^2_{\overline{X}_0}$ определяют по соотношениям из примера 56.

Вычислим веса: $\alpha_1 = 10^6$; $\alpha_2 = 0,11 10^6$; $a_1 = 0,9$; $a_2 = 0,1$.

Средневзвешенное значение $t_0 = 156,599$ ^{0}С.

Дисперсия $S^2 = 0,9 10^{-6}$ $(^0\text{С})^2$; оценка СКО $S = 0,00095 \approx 0,001$ ^{0}С.

Абсолютную погрешность средневзвешенного $\Delta_{ср}$, число степеней свободы k определяем по формулам примера 57: $k = 11$; $t = = 3,106$ при $P = 0,99$; $\Delta_{ср} = 3,106 \cdot 0,001 = 0,0031 \approx 0,003$ ^{0}С.

Результат оценки средневзвешенного значения: $t = (156,599 \pm \pm 0,003)$ ^{0}С, т.е. с доверительной вероятностью 0,99 значение средневзвешенного находится в пределах $156,596 \le t \le 1569,602$ ^{0}С.

Проверка однородности дисперсий по группам:

Группы	S^2_i/S^2_j	F	Вывод
2-1	9	4,405	Неоднородны

Проверка однородности средних (см. пример 58): $t = 1,02 < t_н = = 2,763$ – средние однородны.

Пример 65. Глубина глухого отверстия измерена индикаторным глубиномером (ИГ) и микрометрическим глубиномером (МГ). Результаты измерений приведены в таблице:

Номер группы	$X_{срi}$, мм	n_i
1 ИГ	$20,00 \pm 0,02$ $P = 0,95$	5
2 МГ	$19,98 \pm 0,01$ $P = 0,95$	7

Найти средневзвешенное значение X_0, СКО измерений и абсолютную погрешность средневзвешенного при уровне значимости 0,05. Сделать выводы об однородности дисперсий и средних значений.

Решение. $\overline{X}_0$, a_i и $\sigma^2_{\overline{X}_0}$ определяют по соотношениям из примера 56.

Вычислим оценки СКО среднего: $S_{срi} = \Delta_{срi}/t$; $S_{ср1} = 0,0072$; $S_{ср2} = = 0,0041$.

Вычислим веса: $\alpha_1 = 0,0193 10^6$; $\alpha_2 = 0,0595 10^6$; $a_1 = 0,245$; $a_2 = = 0,755$.

Средневзвешенное значение $X_0 = 19,985$ мм.

Дисперсия $S^2 = 12,69 10^{-6}$ мм^2; оценка СКО $S = 0,00356 \approx \approx 0,004$ мм.

Абсолютную погрешность средневзвешенного $\Delta_{ср} = tS$, число степеней свободы k определяют по формулам примера 57: $k = 29$; $t = 2,045$ при $P = 0,95$; $\Delta_{ср} = 2,045 \cdot 0,004 = 0,00818 \approx 0,008$ мм.

Результат оценки средневзвешенного значения: $t = (19,985 \pm \pm 0,008)$ мм, т.е. с доверительной вероятностью 0,95 значение средневзвешенного находится в пределах: $19,977 \le t \le 19,993$ мм.

Проверка однородности дисперсий средних по группам:

Группы	S^2_i/S^2_j	F	Вывод

1-2	4,73	3,97	Неоднородны

Проверка однородности средних (см. пример 58): t = 6,15 > $t_н$ = = 2,28 (P = 0,95) – средние неоднородны. По-видимому, в результате, полученном ИГ, содержится неисключенная систематическая погрешность.

3.2.3. Отбрасывание промахов

Пример 66. При измерении постоянной температуры получены результаты, приведенные в таблице. Требуется выявить и исключить грубый промах по критерию Романовского.

i	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15
t_i, ^{0}C	20,42	20,40	20,40	20,41	20,39	20,41	20,39	20,30	20,38	20,42	20,42	20,38	20,39	20,39	20,40

Решение. Найдем среднее значение температуры и СКО без сомнительного результата (20,30): $t_{ср}$ = 20,40 ^{0}С, S = 0,014 ^{0}С. Вычислим критерий отклонения сомнительного результата от среднего: $(t_{ср} - t_i)/ S$ = (20,40 – 20,30)/0,014 = 7,14. Критерий Романовского (см. табл. 2.1), основанный на распределении Стьюдента для n = 14 и P = 0,95 равен $t_н$ = 2,24. Вычисленный нами критерий 7,14 > 2,24, следовательно, сомнительный результат следует исключить из статистики как промах.

Пример 67. Результаты 16 измерений напряжения приведены в таблице. Найти и исключить грубый промах, воспользовавшись критерием Романовского на уровне значимости 0,01.

i	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
U_i, В	772	789	791	792	794	795	796	797	798	800	801	803	804	806	807	809

Решение. Найдем среднее значение напряжения и СКО без сомнительного результата (772): $U_{ср}$ = 798,8 В, S = 6,13 В. Вычислим $t_н S$ = 3,08·6,13 = 18,88 и сравним его с отклонением сомнительного результата от среднего значения: |772 – 798,8| = 26,8 > 18,88, следовательно, сомнительный результат следует исключить как промах.

Пример 68. Произведено 10 измерений силы тока, результаты которых приведены в таблице. Расположение значений тока по возрастанию позволило исследователю усомниться в правильности последнего результата. Требуется проверить принадлежность 10-го результата к однородной выборке, используя критерий Романовского при доверительной вероятности P = 0,99. Записать окончательный результат. Оценить неопределенности единичного измерения, проводимого данным методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
I, A	10,07	10,08	10,10	10,12	10,13	10,14	10,16	10,17	10,20	10,40

Решение. Найдем среднее значение силы тока по девяти измерениям (без сомнительного) $I_{ср}$ = 10,13 A. Оценка СКО единичного измерения $S = [(I_i - I_{ср})/8]^{1/2}$ = 0,12 A. Для n = 9 и q = 1 – P = 0,01 критерий $t_н$ = 3,54. Тогда $|I_{сомн} - I_{ср}|/S$ = (10,40 – 10,13)/0,12 = =0,27/0,12 = 2,25 < 3,54. Сомнительный результат не может быть отброшен.

Окончательный результат вычислим с учетом 10-го измерения: $I_{ср}$ = 10,16 A, S_x = 0,09 А, $S_{x\ ср}$ = 0,0285 A. Доверительная погрешность при P = 0,99 и числе степеней свободы 10 – 1 = 9 $\Delta_{x\ ср}$ = $=t\ S_{x\ ср}$ = 3,25·0,0285 ≈ 0,09 A. Запись окончательного результата: I = (10,16 ± 0,09) A, P = 0,99.

Стандартная неопределенность по типу A для единичного измерения u_A=S_x=0,09 А. Расширенная неопределенность при пренебрежимо малой систематической составляющей U = 3·0,09=0,027 А.

Пример 69. Результаты измерений глубины глухого отверстия приведены в таблице. Требуется проверить принадлежность результатов к однородной выборке по критерию Шарлье. Записать окончательный результат измерений.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h, мм	13,23	8,08	13,53	13,66	14,25	15,96	9,75	12,56	13,41	11,77

Решение. При выполнении неравенства $\left|x_i - \bar{x}\right|/\sigma < K_{Ш}$ значение x_i не считают промахом, где $K_{Ш}$ – критерий Шарлье. Проведем последовательные действия по исключению результатов по этому критерию:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-й шаг										
h, мм	13,23	8,08	13,53	13,66	14,25	15,96	9,75	12,56	13,41	11,77
$h_{ср} = 12,62$; $S_h = 2,27$; $S_{h\ ср} = 0,72$										
$K_{Ш}$		2>1,65				1,47<1,65				
2-й шаг										
h, мм	13,23	X	13,53	13,66	14,25	15,96	9,75	12,56	13,41	11,77
$h_{ср} = 13,12$; $S_h = 1,7$; $S_{h\ ср} = 0,57$										
$K_{Ш}$						1,67>1,65	1,98>1,65			
3-й шаг										
h, мм	13,23	X	13,53	13,66	14,25	X	X	12,56	13,41	11,77
$h_{ср} = 13.2$; $S_h = 0,81$; $S_{h\ ср} = 0,31$										
$K_{Ш}$										1,77>1,65
4-й шаг										
h, мм	13,23	X	13,53	13,66	14,25	X	X	12,56	13,41	X
$h_{ср} = 13,44$; $S_h = 0,553$; $S_{h\ ср} = 0,226$										
$K_{Ш}$					1,46>1,3			1,6>1,3		
5-й шаг										
h, мм	13,23	X	13,53	13,66	X	X	X	X	13,41	X
$h_{ср} = 13,46$; $S_h = 0,183$; $S_{h\ ср} = 0,0915$										

Как следует из таблицы, критерий довольно жесткий – его применение привело к исключению 6 результатов из 10.

Пример 70. Произведено 10 измерений температуры в точке таяния льда, результаты которых приведены в таблице. Расположение полученных значений в вариационный ряд позволило исследователю усомниться в правильности наибольшего результата. Требуется проверить принадлежность 10-го результата к однородной выборке на уровне значимости 0,05, используя вариационный критерий Диксона. Записать окончательный результат измерений. Оценить неопределенности единичного измерения, проводимого данным методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, К	271,25	272,53	272,95	273,28	273,37	273,49	273,52	273,60	274,36	276,50

Решение. Вариационный критерий Диксона $K_Д = (x_n - x_{n-1})/(x_n - x_1)$ равен: $K_Д$ = (276,50 – 274,36)/(276,50 – 271,25) = 2,14/4,25 = 0,504 > > 0,41 (n = 10; P = 0,95). Результат может быть отброшен как промах.

Вычислим среднее значение без отброшенного результата: $t_{ср}$ = =273,15 ^{0}C, S_t =0,867 , $S_{t\ ср}$ =0,289. Доверительная погрешность при P = 0,95 и числе степеней свободы 9 – 1 = 8 $\Delta_{t\ ср} = t\ S_{t\ ср}$ = =2,306·0,289 ≈ 0,67 ^{0}C.

Окончательный результат: $t_{ср}$ = (273,15 ± 0,67) ^{0}C, P = 0,95.

Стандартная неопределенность по типу A для единичного измерения $u_A = S_t = 0{,}87\ ^0$С. Расширенная неопределенность при пренебрежимо малой систематической составляющей $U = 2\cdot 0{,}87 = =1{,}74\ ^0$С.

Пример 71. Результаты измерений концевой меры длины приведены в таблице. Требуется проверить принадлежность 10-го результата к однородной выборке на уровне значимости 0,1, используя вариационный критерий Диксона. Записать окончательный результат измерений. Оценить неопределенности единичного измерения, проводимого данным методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l, мкм	97,00	98,65	99,74	99,80	99,98	99,99	100,07	100,23	100,26	101,28

Решение. Вариационный критерий Диксона $K_Д = (x_n\text{-}x_{n-1})/(x_n\text{-}x_1)$ равен: $K_Д = (98{,}65 - 97{,}0)/(101{,}28 - 97{,}00) = 1{,}65/4{,}28 = 0{,}386 > 0{,}35$ ($n = 10$; $P = 0{,}90$) (см. табл. 2.3). Результат может быть отброшен как промах.

Вычислим среднее значение без отброшенного результата: $l_{ср} = =100$ мкм, $S_l =0{,}68$, $S_{l\ ср} =0{,}227$. Доверительная погрешность при P=0,90 и числе степеней свободы 9 – 1 = 8 $\Delta_{l\ ср} = t\ S_{l\ ср} = =1{,}86\cdot 0{,}227\approx \approx 0{,}42$.

Окончательный результат: $l_{ср} = (100{,}00 \pm 0{,}42)$ мкм, $P = 0{,}90$.

Стандартная неопределенность по типу A для единичного измерения $u_A = S_l = 0{,}68$ мкм.

Пример 72. Результаты измерений диаметра круглого отверстия приведены в таблице. Требуется проверить принадлежность 1-го результата к однородной выборке на уровне значимости 0,05, используя вариационный критерий Диксона. Записать окончательный результат измерений. Оценить неопределенности единичного измерения, проводимого данным методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D, мм	12,000	13,846	14,175	14,225	14,226	14,966	15,455	15,506	16,255	16,346

Решение. Вариационный критерий Диксона $K_Д = (x_n\text{-}x_{n-1})/(x_n\text{-}x_1)$ равен: $K_Д = (13{,}846 - 12{,}000)/(16{,}346 - 127{,}000) = 1{,}846/4{,}346 = =0{,}425 > 0{,}41$ ($n = 10$; $P = 0{,}95$). Результат может быть отброшен как промах.

Вычислим среднее значение без отброшенного результата: $D_{ср} = 15{,}000$ мм, $S_D =0{,}94$, $S_{D\ ср} =0{,}313$. Доверительная погрешность при $P = 0{,}95$ и числе степеней свободы 9 – 1 = 8 $\Delta_{D\ ср} = t\ S_{D\ ср} = =2{,}306\cdot 0{,}313 = 0{,}722$.

Окончательный результат: $D_{ср} = (15{,}000 \pm 0{,}722)$ мм, $P = 0{,}95$.

Стандартная неопределенность по типу A для единичного измерения $u_A = S_D = 0{,}94$ мм. Расширенная неопределенность при $P = 0{,}95$ $U = 2\cdot 0{,}94 = 1{,}88$ мм.

Пример 73. Результаты измерения периода колебаний математического маятника приведены в таблице. Требуется проверить их на однородность выборки по критерию «трех сигм». Представить результат измерений периода для $P = 0{,}99$. Оценить неопределенности единичного измерения, производимого этим методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T, с	1,97	2,02	1,87	2,13	2,10	2,15	1,78	1,98	2,11	1,89

Решение. По этому критерию результат x_i считают промахом, если $\left|x_i - \bar{x}\right| > 3\sigma$. Проверку проводят последовательно исключая из выборки промахи до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $\left|x_i - \bar{x}\right| < 3\sigma$. Проверим на однородность минимальное и максимальное значения из приведенного ряда:

<table>
<tr><td>i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>T_i, с</td><td>1,97</td><td>2,02</td><td>1,87</td><td>2,13</td><td>2,10</td><td>2,15</td><td>1,78</td><td>1,98</td><td>2,11</td><td>1,89</td></tr>
<tr><td colspan="11">$T_{ср} = 2{,}00$ с; $S_T = 0{,}121$ с; $S_{Tср} = 0{,}038$ с</td></tr>
<tr><td colspan="11">«3σ» = 0,363</td></tr>
<tr><td>$T_i - T_{ср}$</td><td>-0,03</td><td>0,02</td><td>-0,13</td><td>0,13</td><td>0,10</td><td>0,15</td><td>-0,22</td><td>-0,02</td><td>0,11</td><td>-0,11</td></tr>
</table>

Видно, что ни одно отклонение от среднего не превышает критерия «трех сигм». Следовательно, выборка однородна. Доверительная погрешность результата: $\Delta_{Tср} = 3{,}25\cdot 0{,}038 = 0{,}124 \approx 0{,}12$ с. Результат измерений представим в виде $T = (2{,}00 \pm 0{,}12)$ с; $P = =0{,}99$.

Стандартная неопределенность по типу А равна $u_A = S_T = 0{,}12$с. Расширенная неопределенность при $P = 0{,}99$ $U = 3\cdot 0{,}12 = 0{,}36$ с.

Пример 74. Результаты измерений постоянного значения магнитной индукции приведены в таблице. Требуется проверить их на однородность выборки по критерию «трех сигм». Представить результат измерений для P = 0,95. Оценить неопределенности единичного измерения, производимого этим методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B, мТл	37,82	38,72	39,70	39,77	40,24	41,10	41,20	41,28	41,73	45,10?

Решение. Подозрение вызывает 10-й результат. Вычислим характеристики распределения без него (по результатам 1 – 9): $B_{ср}$ = =40,17 мТл; оценка СКО S = 1,3; критерий «3σ» = 3,9. Разница $B_{10} - B_{ср}$ = 45,10 – 40,17 = 4,93 > 3,9. Следовательно, 10-й результат не следует включать в выборку.

Оценка СКО среднего: $S_{ср}$ = 0,43 мТл. При доверительной вероятности 0,95 и числе степеней свободы восемь погрешность среднего $\Delta_{ср}$ = 2,306·0,43 = 0,99 мТл. Окончательный результат запишем в виде B = (40,17 ± 0,99) мТл.

Стандартная неопределенность по типу A $u_A = S$ = 1,3 мТл. Расширенная неопределенность при P = 0,95 U = 2·1,3 = 2,6 мТл.

Пример 75. Результаты измерения теплопроводности образца приведены в таблице. Требуется проверить их на однородность выборки по критерию «трех сигм». Представить результат измерений периода для P = 0,99. Оценить неопределенности единичного измерения, производимого этим методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	17,30	18,56	19,33	20,68	20,76	21,35	22,47	23,20	23,95	27,61?

Решение. Сомнительным кажется 10-й результат. Вычислим характеристики распределения без него (по результатам 1 – 9): $\lambda_{ср}$ = =20,84 Вт/м^{0}С; оценка СКО S = 2,2; критерий «3σ» = 6,6.

Разница $\lambda_{10} - \lambda_{ср}$ = 27,61 – 20,84 = 6,77 > 6,6. Следовательно, 10-й результат не следует включать в выборку.

Оценка СКО среднего: $\lambda_{ср}$ = 0,73 Вт/м^{0}С. При доверительной вероятности 0,99 и числе степеней свободы, равной восьми, погрешность среднего $\Delta_{ср}$ = 3,555·0,73 = 2,6 Вт/м^{0}С. Окончательный результат запишем в виде λ = (20,84 ± 2,6) Вт/м^{0}С.

Стандартная неопределенность по типу A равна: u_A = S = =2,2 Вт/м^{0}С. Расширенная неопределенность при P = 0,99 U = =3·1,3= 6,6 Вт/м^{0}С.

Пример 76. По результатам измерений линейного размера построен вариационный ряд. Значения крайних членов вариационного ряда указывают на «засоренность» выборки. Необходимо оценить усеченное среднее по методу Пуанкаре (см. табл. 2.5), приняв степень засорение выборки ξ = 0,25. Сравнить устойчивость среднего и медианы к выбросам.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L, мм	–0,17	3,95	5,44	5,50	7,82	8,72	8,91	9,70	9,77
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
L, мм	10,24	11,10	11,20	11,28	11,73	13,32	14,51	16,18	17,19

Решение. Усеченное среднее в методе Пуанкаре

$$T(\alpha)=\frac{1}{n-2k}\sum_{i=k+1}^{n-k}x_i\ ,$$

где k – число отброшенных значений, $k \le \alpha n$ – целая часть от произведения αn; n – объем выборки; α – некоторая функция засорения выборки ξ.

При ξ = 0,25 α = 0,222 (табл. 2.5), тогда k = 4. Усеченное среднее равно $T(\alpha)$ = 10,05 мм; med = 10,005; оценка СКО S = 1,29. Для выборки без усечения среднее $L_{ср}$ = 9,80 мм; med = 10,005; оценка СКО S = 4,32.

Таким образом, медиана гораздо более устойчива к выбросам, чем среднее арифметическое.

Пример 77. Результаты измерений линейного размера, показанные в таблице, расположены по возрастанию. 11-й результат вызывает сомнение. Требуется проверить его однородность выборке по критерию Граббса, а также оценить устойчивость оценок среднего арифметического и медианы к выбросу.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
L, мм	7,19	7,42	8,12	9,17	9,19	9,60	11,03	11,20	12,26	12,32	15,90

Решение. Оценим параметры исходной выборки: среднее $L_{ср}$ = =10,31 мм; med = 9,60; оценка СКО S = 2,55. Проверим по критерию Граббса (см. табл. 2.4) 11-й член ряда: $G_n = (x - \bar{x})/s$, 15,90 – –10,31 = 5,59; 5,59/2,55 = 2,192. При уровне значимости 0,1 G_n = =2,190 < 2,192. Следовательно, 11-й результат нужно отбросить.

Параметры выборки без отброшенного результата: среднее $L_{ср}$ = 9,75 мм; med = 9,39; оценка СКО S = 1,88.

При отбрасывании 11-го результата среднее изменилось примерно на 6%, а медиана – на 2%. Таким образом, среднее арифметическое чувствительнее к выбросам, чем медиана.

Пример 78. В результате испытаний по биномиальному плану получен ряд значений наработки изделий до отказа. Данные приведены в таблице. По этим результатам требуется определить точечную и интервальную (при α = 0,1) оценки средней наработки до отказа непараметрическим методом. Найти и сравнить математическое ожидание отклонений от среднего и от медианы.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T, ч	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7

Решение. В качестве оценки центра распределения принимаем выборочную медиану, т.е. среднее значение ряда, и доверительный интервал, характеризующий точность этой оценки (x_i; x_j), где i – наибольшее целое число меньше $(n + 1 - Z_p\sqrt{n})/2$, а j – наименьшее целое число больше $(n + 1 + Z_p\sqrt{n})/2$; Z_p – квантиль распределения Гаусса.

Медиана распределения наработки до отказа $T_{мед}$ = 5,5 ч, среднее арифметическое 5,2 ч. Квантиль нормального распределения $Z_p(1 - α/2 = 0,95) = 1,645$, откуда $i = 2$; $j = 9$. Таким образом, значение средней наработки до отказа при доверительной вероятности 0,95 находится в интервале (3;7) ч.

Анализ отклонений от медианы показывает, что их матожидание равно нулю, т.е. они симметричны относительно медианы, чего нельзя сказать о среднем арифметическом значении отклонений – оно равно – 0,3 ч.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T - T_{мед}$, ч	- 3,5	- 2,5	- 1,5	- 0,5	- 0,5	0,5	0,5	1,5	1,5	1,5

Пример 79. В результате испытаний по биномиальному плану получен ряд значений наработки изделий до отказа. Данные приведены в таблице. По этим результатам требуется определить точечную и интервальную (при α = 0,05) оценки средней наработки до отказа непараметрическим методом. Найти и сравнить матожидание отклонений от среднего и от медианы.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T, ч	5	6	7	8	9	9	9	10	10	10
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T, ч	10	10	11	11	11	11	12	12	12	15

Решение. Выборочную медиануопределяем как указано в примере 78.

Медиана распределения наработки до отказа $T_{мед}$ = 10 ч, среднее арифметическое 9,9 ч. Квантиль нормального распределения $Z_p(1 - α/2 = 0,975) = 1,96$, откуда $i = 6$; $j = 15$. Таким образом, значение средней наработки до отказа при доверительной вероятности 0,95 находится в интервале (9;11) ч.

Анализ отклонений от медианы показывает, что их матожидание равно нулю, т.е. они симметричны относительно медианы, чего нельзя сказать о среднем арифметическом значении отклонений: оно равно – 0,1 ч.

Пример 80. В результате многократных измерений постоянной температуры получен ряд ее значений, приведенных в таблице. По этим результатам требуется определить точечную и интервальную (при α = 0,05) оценки измеренной температуры непараметрическим методом. Найти и сравнить устойчивость к выбросам среднего и медианы.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T, ^{0}C	99	99	100	100	100	100	100	100	100	100

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T, ^{0}C	100	100	100	101	101	101	101	101	101	101

Решение. Выборочную медиану определяем как указано в примере 78.

Медиана распределения измеренной температуры $T_{\text{мед}}$ = 100 ^{0}C; среднее арифметическое 100,35^{0}C. Квантиль нормального распределения $Z_p(1 - \alpha/2 = 0{,}975) = 1{,}96$, откуда i = 3; j = 18. Таким образом, значение средней температуры при доверительной вероятности 0,95 находится в интервале (100; 101) ^{0}C.

Из таблицы видно, что медиана нечувствительна к изменениям значений температуры по концам вариационного ряда. При наличии промахов более, чем в трех значениях по краям ряда, изменится лишь доверительный интервал значений температуры. Среднее значение, в отличие от медианы, очень чувствительно к этим выбросам.

3.3. Косвенные измерения

В косвенных измерениях искомую физическую величину определяют из результатов прямых измерений других физических величин, связанных с искомой известной зависимостью $Q = F(Q_1, Q_2, \ldots Q_m)$. Простейшим случаем является линейная зависимость $Q = \sum_{i=1}^{m} b_i Q_i$.

Результат и погрешность косвенного измерения в этом случае находят методом раздельной обработки аргументов и их погрешностей. Произведения b_iQ_i рассматриваются в данном методе как косвенно определяемые произведения двух прямо измеряемых слагаемых. Оценки результатов многократных измерений аргументов $\hat{Q}_i$ дают оценку результата косвенного измерения, равную при линейной зависимости $\hat{Q} = \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{Q}_i$. Эта оценка обладает свойствами оценки аргументов (несмещённость, состоятельность и эффективность).

Дисперсия результата косвенного измерения равна $D[Q] = \sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot D[Q_i]$.

Аргументы Q_k и Q_l могут быть коррелированы (ρ_{kl} >> 0) и некоррелированы ($\rho_{kl} \approx 0$) между собой.

СКО результата косвенного измерения при наличии корреляции

$$S(\hat{Q}) = \left[\sum_{i=1}^{m} b_i^2 S^2(\hat{Q}_i) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \hat{\rho}_{kl} b_k b_l S(\hat{Q}_k) S(\hat{Q}_l) \right]^{1/2} \quad k \neq l,$$

где несмещенная оценка коэффициента корреляции между погрешностями аргументов Q_k и Q_l равна

$$\hat{\rho}_{kl} = \frac{1}{n(n-1) S(\hat{Q}_k) S(\hat{Q}_l)} \sum_{i=1}^{n} (Q_{ki} - \hat{Q}_k)(Q_{li} - \hat{Q}_l),$$

n – число прямых измерений аргументов.

Пренебречь корреляцией между двумя аргументами Q_k и Q_l можно при выполнении условия $\left| \hat{\rho}_{kl} \sqrt{n-2} / \sqrt{1 - \hat{\rho}_{kl}^2} \right| < t_q$, где t_q – коэффициент Стьюдента при уровне значимости q и числе степеней свободы (n – 2).

Желательно убедиться в отсутствии корреляции всех парных сочетаний аргументов. Пренебрежение имеющейся корреляцией завышает точность результата косвенного измерения. В отсутствии корреляции при нелинейной зависимости косвенно определяемой величины от аргументов, оценки СКО случайных погрешностей суммируются по формуле

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \right)^2 S_i^2(\hat{Q}_i)} \, .$$

Моделью для распределения результатов измерений отдельных аргументов, особенно если их много, можно считать случайную, нормально распределенную величину. Во всяком случае, для оценок аргументов (средних значений) эта модель вполне соответствует действительности. Таким образом, и случайная погрешность результата косвенного измерения вполне обоснованно может считаться нормально распределенной центрированной величиной. В таком случае доверительная граница случайной погрешности результата косвенного измерения может быть найдена как обычно по квантилям нормального распределения: $\varepsilon(P)=Z_p S(\tilde{Q})$.

При относительно малом числе измерений вместо квантиля нормального распределения Z_p применяют коэффициент Стьюдента t_q.

В отношении неисключенных систематических погрешностей аргументов, как правило, постулируется равномерный закон распределения. Это дает несколько консервативную оценку погрешности результата косвенного измерения. Систематические погрешности, заданные доверительными границами, суммируют по формуле $\theta(P)=k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2\theta_i^2}$, где k – коэффициент, зависящий от m, P и $L = (b_i Q_i)_{\max}/b_i Q_i$ (табл.3.2 и 3.3).

Таблица 3.2

Значения k при $m > 4$

P	0,90	0,95	0,98	0,99
k	0,95	1,1	1,3	1,4

Таблица 3.3

Значения k при $m \le 4$

L	$P = 0{,}98$			$P = 0{,}99$		
	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
1	1,22	1,28	1,30	1,28	1,38	1,41
2	1,16	1,23	1,26	1,22	1,31	1,36
3	1,11	1,17	1,20	1,16	1,24	1,28
4	1,07	1,12	1,15	1,12	1,18	1,22
5	1,05	1,09	1,12	1,09	1,14	1,18

Суммарная погрешность результата косвенного измерения зависит от соотношения $\theta(P)/S(\tilde{Q})$ и равна:

$\varepsilon(P)$ при $\theta(P)/S(\tilde{Q})<0{,}8$;

$\theta(P)$ при $\theta(P)/S(\tilde{Q})>8$;

$k_p[\varepsilon(P)+\theta(P)]$ при $0{,}8\le\theta(P)/S(\tilde{Q})\le 8$,

где k_p – табличный коэффициент, меньший единицы (0,7 – 0,87 при P = 0,95 – 0,99).

При нелинейной зависимости между аргументами косвенно измеряемой величины применяют метод линеаризации, состоящий в разложении функции в ряд Тейлора в точке $(\tilde{Q}_1,\tilde{Q}_2,....\tilde{Q}_m)$:

$$Q=f(Q_1,Q_2,....Q_m)=f(\tilde{Q}_1,\tilde{Q}_2....\tilde{Q}_m)+\sum_{i=1}^{m}\frac{df}{dQ_i}\cdot\Delta Q_i+\tilde{R}.$$

Производные df/dQ_i вычисляют в точках $\tilde{Q}_1,\tilde{Q}_2,....\tilde{Q}_m$ $\Delta Q_i=Q_i-\tilde{Q}_m$.

Остаточный член $\hat{R}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial Q_i \partial Q_j}\cdot\Delta Q_i \Delta Q_j$.

Метод линеаризации применяют, когда можно пренебречь членом $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}<0{,}8\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right)^2 S^2(\tilde{Q}_i)}.$$

Отметим, что результат, получаемый при пренебрежении членами ряда Тейлора более высокого порядка, совпадает с результатом анализа функции методом ее дифференцирования по аргументам.

Погрешность результата косвенного измерения при малом $\tilde{R}$ $\Delta=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial Q_i}\cdot\Delta Q_i$.

Частные производные $\frac{\partial f}{\partial Q_i}=w_i$ называют коэффициентами влияния i-го аргумента.

Доверительные границы погрешностей вычисляют так же, как и при линейной зависимости, но коэффициенты b_i заменяют на коэффициенты влияния w_i:

$$\theta(P)=k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right)^2\theta_i^2},$$

где k находят по табл. 3.2 при $m > 4$ или по табл. 3.3 при $m \le 4$.

Метод раздельной оценки аргументов применим, когда на погрешности результата косвенного измерения сказываются только погрешности результатов измерений аргументов. При этом искомой величиной является функция математических ожиданий аргументов $Q=f[M(Q_1),M(Q_2),...M(Q_m)]$ и, следовательно, $\hat{Q}=f(\hat{Q}_1,\hat{Q}_2,....\hat{Q}_m)$.

В случае, когда аргументы взаимосвязаны, искомая величина – математическое ожидание функции аргументов: $Q=M[f(Q_1,Q_2,...Q_m)]$. Для анализа таких функциональных зависимостей применяют методы приведения или перебора.

Метод приведения представляет собой метод статистической обработки данных, при котором результат косвенного измерения находят путем обработки группы отдельных значений измеряемой величины, рассматриваемых как совокупность результатов прямых измерений. В методе приведения важно, чтобы результаты наблюдений аргументов были согласованы, т.е. получены при одних и тех же значениях влияющих факторов или одновременно.

Метод перебора – метод статистической обработки сгруппированных результатов наблюдений аргументов, при котором результат косвенного измерения находят по приближению построенной функции распределения отдельных значений к измеряемой величине. В этом методе анализируется эмпирическая функция распределения отдельных значений измеряемой величины. Метод требует, чтобы результаты наблюдений аргументов группировались для построения эмпирических гистограмм, а их значения, соответствующие серединам интервалов группирования, составляли сочетания, подставляемые в исходную зависимость. В результате таких подстановок получают статистический ряд значений искомой величины, при анализе которого устанавливают ее значение и погрешность.

Три перечисленных метода нахождения результата косвенного измерения можно схематически изобразить следующим образом:

Метод раздельного анализа аргументов:

- получение результата j-го наблюдения i-го аргумента X_{ij};
- получение результата измерения (обработкой j наблюдений) i-го аргумента $\hat{X}_i$;
- получение результата косвенного измерения подстановкой оценок аргументов в исходную зависимость $\hat{Q}=f(\hat{X}_1,\hat{X}_2,....\hat{X}_m)$.

Метод приведения:

- получение результата j-го наблюдения i-го аргумента X_{ij};
- оценка отдельных значений искомой величины (подстановкой в исходную зависимость j-х значений i-х аргументов) $\hat{Q}_j$;
- получение результата косвенного измерения $\hat{Q}$ статистической обработкой совокупности значений $\hat{Q}_j$.

Метод перебора:

- получение результата j-го наблюдения i-го аргумента X_{ij};
- разбиение наблюдений i-го аргумента на k интервалов и построение гистограммы (или частоты попадания результата наблюдений в данный интервал разбиения) X_{ik};

• подстановка в исходную зависимость всех возможных сочетаний аргументов из центров интервалов разбиения и получение ряда значений искомой величины $\hat{Q}_k$ и её частотной характеристики;

• анализ ряда значений искомой величины, статистическая оценка $\hat{Q}$ и её погрешности.

Суммирование случайных и систематических составляющих погрешности косвенно определяемой величины в отсутствии корреляции проводят по формуле

$$\Delta(P)=K\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right)^2 S^2(\hat{Q}_i)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right)^2\frac{\theta_i^2}{3}},$$

где $$K=\frac{t_p(f_{эф})S_\Sigma+\theta(P)}{S_\Sigma+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right)^2\frac{\theta_i^2}{3}}},\qquad \theta(P)=k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right)^2\theta_i^2},$$

$$f_{эф}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right)^2 S^2(Q_i)\right)^2-\frac{2}{m+1}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right)^4 S^4(Q_i)}{\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right)^4 S^4(Q_i)}.$$

Порядок оценивания погрешностей косвенных измерений приведен в МИ 2083-90 «ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей» (см. также ГОСТ 16263-70, РД50-555-85).

Пример 81. При определении ускорения свободного падения g с помощью математического маятника используется расчетная формула $g= 4\pi^2 l/T^2$, где l – длина математического маятника, определяемая линейкой с ценой деления 1 мм; T – период колебаний маятника, определяемый секундомером с пределом допускаемой погрешности 0,05 с. Проведено пять прямых измерений времени и длины. Результаты измерений приведены в таблице. Вычислить результат измерений и погрешность значения g и неопределенность измерений.

i	1	2	3	4	5
l, см	99,8	100,1	100,2	99,9	100,0
T, с	2,00	1,90	2,20	1,80	2,10

Решение. Среднее значение длины маятника $l_{ср}$ = 100 см; СКО среднего $S_{l\,ср}$ = 0,071 см; погрешность результата измерения длины маятника при P = 0,68 и числе степеней свободы 4 равна Δ_l = = $t\cdot S_{l\,ср}$ = 1,2·0,071 = 0,085 см; предельная погрешность линейки равна 0,05 см. Тогда суммарная погрешность измерения длины равна $\Delta_{l\,сум} = (0{,}085^2 + 0{,}05^2)^{1/2} = 0{,}099 \approx 0{,}1$ см.

Среднее значение периода колебаний $T_{ср}$ = 2,0 с; СКО среднего $S_{Tср}$ = 0,071 с; погрешность результата измерения периода при P = 0,68 и числе степеней свободы 4 равна $\Delta_T = t\cdot S_{Tср}$ = 1,2·0,071 = =0,085 с; предельная погрешность секундомера 0,05 с. Тогда суммарная погрешность измерения периода равна $\Delta_{Tсум} = (0{,}085^2 + +0{,}05^2)^{1/2} \approx 0{,}1$ с.

Значение ускорения свободного падения по результатам измерений $g = 4\pi^2 l/T^2$ = 9,87 м/с^2.

Относительную погрешность измерения значения ускорения свободного падения можно определить как $\Delta g/g = 2\Delta\pi/\pi + \Delta l/l+ +2\Delta T/T$.

Пренебрегая погрешностью значения π (3,141593) получим $\Delta g/g$ = 0,1/100 + 2·0,1/2 ≈ 0,1. Абсолютная погрешность Δg = =9,87·0,1 ≈ 1 м/с^2.

Запишем результат: g = (9,9 ± 1,0) м/с^2, P = 0,99. После измерения периода колебаний маятника и вычислении значения g преобладает систематическая погрешность с доверительной вероятностью более 0,99. Именно поэтому в окончательном результате указывают эту доверительную вероятность. Если бы преобладала случайная погрешность, тогда следовало бы указать P = 0,68.

Пример 82. При определении ускорения свободного падения g с помощью математического маятника используют расчетную формулу $g= 4\pi^2 n^2 l/t^2$, где l – длина математического маятника; n – число колебаний маятника; t – время десяти колебаний маятника, определяемое секундомером с пределом допускаемой погрешности 5 мс. Проведено 10 прямых измерений времени и одно – длины. Результаты измерений времени приведены в таблице, а результат однократного измерения длины записан в виде l = = 54,2 см ± 0,05 см = (54,2 ± 0,05)·10^{-2} м, где 0,05 – половина цены деления миллиметровой линейки. Вычислить результат измерений, погрешности и неопределенности измерений g этим методом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i, с	14,72	14,75	14,76	14,77	14,71	14,73	14,75	14,74	14,73	14,74

Решение. Среднее значение десяти колебаний маятника $t_{ср}$ = =14,74 с. Оценка дисперсии единичного измерения S^2_i = =$\Sigma(t_i - t_{ср})^2/(n-1)$. Оценка СКО единичного измерения S_i = 0,018 с и СКО среднего $S_{ср} = 0{,}018/n^{1/2}$ = 0,006 с. Суммарная погрешность результата измерения, состоящая из случайной погрешности измерения и неисключенной систематической погрешности (θ) секундомера, может быть определена следующим образом. Допускаемая случайная погрешность при доверительной вероятности 0,99 и числе степеней свободы $k = n - 1$= 10 – 1 = 9 равна $\Delta_{сл} = tS_{ср}$, где коэффициент Стьюдента t = 3,25; $\Delta_{сл}$ = 3,25·0,006 = 0,02 с. Суммарную погрешность результата измерений времени десяти колебаний маятника можно найти либо арифметическим, либо геометрическим суммированием погрешностей. В первом случае получим $\Delta_{сум}$ = 0,02 + 0,005 = 25 мс, во втором – $\Delta_{сум} = (0{,}02^2 + 0{,}005^2)^{1/2}$ = =21 мс. В дальнейшем используем последнее значение погрешности. Можно вычислить погрешность несколько иначе: сначала оценку стандартного отклонения суммарной погрешности $S_{сум} = (S_{ср}^2 + \theta^2/3)^{1/2}$, а затем погрешность результата как $\Delta_{сум} = t\ S_{сум}$ = =3,25·6,67= 21,6 мс ≈ 22 мс.

Относительную погрешность измерения значения ускорения свободного падения можно определить как $\Delta g/g = 2\Delta\pi/\pi + \Delta l/l + 2\Delta t/t$. Пренебрегая погрешностью значения π (3,141593), получаем $\Delta g/g$ = 0,05/52,4 + 2·0,021/14,74 = 3,8·10^{-3} ≈ 4·10^{-3}. Абсолютная погрешность Δg = 9,824·0,004 ≈ 0,04 м/с^2.

Запишем результат: g = (9,824 ± 0,04) м/с^2, P = 0,99.

Расширенная неопределенность U_g = 0,04 м/с^2. Стандартная суммарная неопределенность u_C = 0,04/3 = 0,013 м/с^2.

Пример 83. Для измерения мощности, выделяемой в резисторе, измерили ток амперметром, класс точности (γ) которого обозначен 1,5. Амперметр показал ток 3,5 А на пределе измерения 5 А. Значение сопротивления резистора, равное 75 Ом, найдено с помощью моста, класс точности которого обозначен 1,0. Измерения сопротивления и тока однократные. Найти результат измерения мощности.

Решение. Так как мощность определяем по функциональной зависимости $P = I^2 \cdot r$, то измерения являются косвенными. Поскольку указаны классы точности приборов, то по ним и оценим погрешность прямых измерений. Границы неисключенных систематических погрешностей примем равными пределам допускаемых погрешностей приборов. Граница погрешности при измерении тока θ_I = 5(1,5/100) = 0,075 А. Граница погрешности при измерении сопротивления θ_R = 75(1/100) =0,75 Ом.

Результат измерения: $P = I^2 \cdot R$ = 3,5²·75 = 918,75 Вт, P ≈ 919 Вт.

Относительная погрешность косвенного определения функции $y = f(z)$ определяется по формуле

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial y}{\partial z_j}\cdot \Delta z_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

В нашем случае:

$\partial P/\partial I = 2rI$; $\partial P/\partial r = I^2$;

$(\partial P/\partial I)\theta_1 = 2RI\theta_1$ = 2·75·3,5·0,075 = 39,375 Вт;

$(\partial P/\partial r)\theta_R = I^2\theta_R$ = 3.5²·0,75 = 9,1875 Вт;

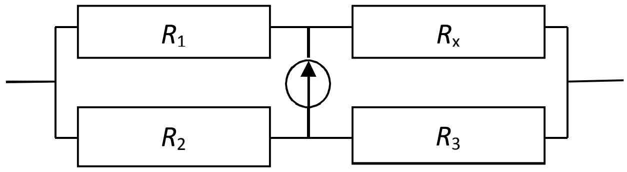
$\delta y = (918{,}75)^{-1}\sqrt{39{,}375^2 + 9{,}1875^2} \approx 40{,}43/918{,}75$.

Абсолютная погрешность θ_P ≈ 40 Вт.

При арифметическом сложении составляющих θ_P = 39,375 + +9,1875 = 48,56 ≈ 49 Вт.

Поскольку использованы предельные погрешности приборов, доверительная вероятность оценки погрешности $P \geq 0{,}99$. Следовательно, расширенная неопределенность $U_P = 40$ Вт, а стандартная суммарная неопределенность $u_C = 40/3 \approx 13$ Вт.

Пример 84. Сопротивление R_x измерено по мостовой схеме, показанной на рисунке. Относительные среднеквадратические значения случайной погрешности сопротивлений моста R_1, R_2, R_3 одинаковы и равны 0,01%. Найти относительное значение СКО случайной погрешности R_x.



Решение. Сопротивление $R_x = R_1R_3/R_2$.

Среднеквадратическая случайная погрешность результата косвенного измерения определяется по формуле

$$S_{Rx} = \sqrt{\sum (\partial R_x/\partial Ri)^2 S_{Ri}^2};$$

$$\partial R_x/\partial R_1 = R_3/R_2 = R_x/R_1;$$

$$\partial R_x/\partial R_2 = -R_1R_3/R_2^2 = -R_x/R_2;$$

$$\partial R_x/\partial R_3 = R_x/R_3;$$

$$S_{Rx} = R_x\sqrt{S_{R1}^2/R_1^2 + S_{R2}^2/R_2^2 + S_{R3}^2/R_3^2}.$$

Найдем значение $S_{Rx}/R_x = (0{,}01^2 + 0{,}01^2 + 0{,}01^2)^{1/2} \approx 0{,}02\%$.

Пример 85. Сопротивление R_x измерено однократно по мостовой схеме, показанной на рисунке примера 84. Относительные значения систематической составляющей погрешности сопротивлений моста R_1, R_2, R_3 равны +0,01%, –0,01% и +0,02% соответственно. Найти относительное значение неисключенной систематической погрешности R_x при доверительной вероятности 0,95.

Решение. Сопротивление $R_x = R_1R_3/R_2$, неисключенная систематическая погрешность определяется по формуле

$$\theta_{Rx} = R_x\sqrt{\theta_{R1}^2/R_1^2 + \theta_{R2}^2/R_2^2 + \theta_{R3}^2/R_3^2}.$$

Найдем значение $\theta_{Rx}/R_x = [(+0{,}01)^2 + (-0{,}01)^2 + (+0{,}02)^2]^{1/2} = {=}0{,}02\%$.

Пример 86. При поверке вольтметра на постоянном токе действительное значение электрического напряжения измеряют потенциометрическим методом. Задаваемое значение напряжения ($U_з$) определяется величиной рабочего тока потенциометра ($I_р$) и значением измерительного сопротивления ($R_и$), а рабочий ток потенциометра задается величиной ЭДС нормального элемента ($E_н$) и установочного сопротивления ($R_у$): $U_з = I_рR_и$, $I_р = E_н/R_у$.

Известно, что пределы относительных значений допускаемых погрешностей элементов, участвующих в измерениях при $P \approx 1$, следующие: $\delta R_у = 0{,}05\%$; $\delta E_н = 0{,}05\%$; $\delta R_и = 0{,}05\%$. Чему равна погрешность задаваемого напряжения? Какие типы неопределенностей можно оценить по этим данным, например, при задаваемом напряжении 10 В?

Решение. Погрешность задаваемого напряжения $U_з = E_нR_и/R_у$ определяется по формуле

$\delta U_з = [(\delta E_н/E_н)^2 + (\delta R_и/R_и)^2 + (\delta R_у/R_у)^2]^{1/2} = (0{,}05^2 + 0{,}05^2 + {+}0{,}05^2) = 0{,}087 \approx 0{,}1\%$.

По имеющимся в нашем распоряжении данным можно оценить расширенную и суммарную стандартную неопределенности: $U = {=}\Delta = 0{,}001 \cdot 10 = 10$ мВ и $u_С = U_р/k = 10/3 = 3{,}3$ мВ ($k = 3$ при $P = {=}0{,}99$ при нормальном законе распределения) или $u_C = 10/1{,}71 = 5{,}8$ мВ при равномерном.

Пример 87. Для определения объема параллелепипеда произведено по 10 измерений его сторон. Получены следующие средние значения и оценки СКО погрешности: $a_{ср} = 4{,}31$мм, $b = 8{,}07$мм, $c = {=}5{,}33$мм; $S_a = 0{,}11$, $S_b = 0{,}13$, $S_c = {=}0{,}09$.

Найти погрешность и неопределенности измерений объема параллелепипеда при доверительной вероятности 0,95.

Решение. Результат косвенного измерения объема $V = abc$.

Суммарная случайная погрешность результата

$$S_V = V\sqrt{(S_a/a)^2 + (S_b/b)^2 + (S_c/c)^2} = 185\cdot 0{,}035 = 6{,}5 \text{ мм}^3.$$

Предел погрешности при доверительной вероятности 0,95 определяется по формуле $\Delta_V = tS_V$.

По таблице при числе степеней свободы, равной 10 – 1 = 9, для доверительной вероятности 0,95 определяем коэффициент Стьюдента t = 2,262, тогда Δ_V (0,95) = 2,262·6,5 = 14,7 ≈ 15 мм^3.

Расширенная неопределенность $U_V = \Delta_V$ = 15 мм^3. Суммарная стандартная неопределенность при нормальном законе распределения $u_C = U_V/2$ = 7,5 мм^3.

Пример 88. В адиабатическом калориметре измерено линейное повышение температуры с t_1 = 25,105 ^{0}С, S_1 = 0,003 ^{0}С до t_2 = =27,105 ^{0}С, S_2 = 0,002 ^{0}С за время τ = 10,000 с, S_τ = 0,001 с. Определить показатели точности измерения разницы температур и темпа нагрева.

Решение. Значение разницы температур Δ_t = 2,000 ^{0}С; $S_{\Delta t}$ = =$(S_1^2 + S_2^2)^{1/2}$ = 0,0036 ≈ 0,004 ^{0}С. Запишем окончательный результат: Δ_t = (2,000 ± 0,004) ^{0}С.

Темп нагрева $k = \Delta_t/\tau$. СКО косвенного измерения

$S_k^2 = (\partial k/\partial\Delta)^2 S_\Delta^2 + (\partial k/\partial\tau)^2 S_\tau^2 = k^2(S_\Delta^2/\Delta^2 + S_\tau^2/\tau^2)$, $S_k = k(S_\Delta^2/\Delta^2 + +S_\tau^2/\tau^2)^{1/2}$.

Вычислим S_k = 0,4 10^{-3} ^{0}С/с.

Пример 89. Электрическая энергия, выделяемая на участке цепи с сопротивлением R = 11,68 ± 0,01 Ом за время τ = 405,2 ± 0,1 с, измерена по показаниям миллиамперметра I = 10,230 ± 0,015 А. Указанные погрешности соответствуют классам точности примененных средств измерений. Определить энергию, рассеиваемую участком цепи, находящимся в тепловом равновесии с окружающей средой, погрешности и неопределенности измерений.

Решение. В состоянии теплового равновесия рассеиваемая энергия равна выделяемой: $E = I^2R\tau$ ≈ 495,3 кДж. Суммарная погрешность косвенного измерения выделяемой энергии

$\Delta_\Sigma = E\sqrt{(2\Delta_i/I)^2 + (\Delta_R/R)^2 + (\Delta_\tau/\tau)^2}$ = $[4(0{,}015/10{,}23)^2 + +(0{,}01/11{,}68)^2 + (0{,}1/405{,}2)^2]^{1/2}$ ≈ ± 1,5 кДж. Окончательный результат записываем в виде E = (495,3 ± 1,5) кДж.

Расширенная неопределенность $U = \Delta_E$ = 1,5 кДж. Суммарная неопределенность u_C = 1,5/3 = 0,5 кДж. В данном случае коэффициент охвата взят равным трем, так как в условиях указаны предельно допускаемые погрешности приборов, определяемые их классами точности, т.е. погрешности соответствуют доверительной вероятности не менее 0,99.

Пример 90. Эффективная плотность порошкового материала определялась по методу взвешивания мерной емкости с порошком и без него. Оба взвешивания производили на одних и тех же весах. Плотность рассчитывали по формуле $\rho = (m_{сум} - m_{емк})/V_{емк}$. Результаты измерений приведены в таблице:

Параметры	$V_{емк}$, см^3	$m_{сум}$, г	$m_{емк}$, г
Число измерений	Измерено ранее	10	10
Значение величины	10,0	35,0	20,0
Доверит. погрешность при P = 0,99	$\Delta_{Vемк}$ = ± 0,05	$\Delta_{m\ сум}$ = ± 0,1	$\Delta_{m\ емк}$ = ± 0,1

Определить результат измерений плотности и неопределенности измерения плотности этим методом.

Решение. Поскольку массы $m_{емк}$ и $m_{сум}$ измерены на одних и тех же весах и имеют одинаковые характеристики рассеяния, целесообразно предположить, что эти погрешности коррелированны. Следовательно, вместо геометрического суммирования нужно применить алгебраическое суммирование погрешностей $\Delta_{\Delta m} = \Delta_{m\ емк} + +\Delta_{m\ сумм}$ = ± 0,2 г. При P = 0,99 и числе степеней свободы 10 – 1 = 9 t = 3,25. Тогда $S_{\Delta m} = \Delta_{\Delta m}/t$ = 0,06 г. $S_{Vемк} = \Delta_{Vемк}/t(P = 0{,}99;\ \nu = 99)$ = = 0,05/2,58 = 0,019 см^3. Плотность порошка ρ = 15,0/10,00 = =1,50 г/см^3; $S_\rho = \rho(S^2_{\Delta m}/\Delta_m^2 + S^2_{Vемк}/V^2_{емк})^{1/2}$=1,50(0,004^2+0,0019^2)$^{1/2}$ = = 0,00664 г/см^3; $\Delta_\rho(P = 0{,}99;\ \nu = 9)$ = 0,0216 ≈ 0,02 г/см^3. Результат измерения плотности: ρ = (1,50 ±0,02) г/см^3 при P = 0,99.

Неопределенности по типу A: $u_{\Delta m}$ = 0,06 г; $u_{Vемк}$ ≈ 0,02 см^3; суммарная стандартная неопределенность косвенного измерения плотности $u_C = S_\rho$ = 6,64 мг/см^3. Расширенная неопределенность U_ρ (P = 0,99) = 3·0,00664 ≈ 0,02 г/см^3.

3.4. Совместные и совокупные измерения

Совместные измерения – это одновременные измерения нескольких неодноименных величин для определения зависимости между ними. Таким образом, целью совместных измерений является получение функциональной зависимости разнородных физических величин. Другими словами, совместные измерения реализуются тогда, когда зависимость между разнородными величинами объективно существует, но формула ее нам неизвестна и мы пытаемся ее найти в виде эмпирического соотношения. Примеры совместных измерений – градуировки средств измерений или получение функции преобразования, например, термопары. Важно также отметить, что в совместных измерениях по существу реализуется преобразование измеряемой физической величины в другую – неоднородную ей, например, механической или тепловой в электрическую.

В простейшем и наиболее практически важном случае ищется зависимость вида $Y = f(X)$. Она может быть выражена формулой, графически и таблично. Этот случай важен потому, что на практике довольно часто удается линеаризовать нелинейную по природе зависимость между неоднородными величинами каким-либо из известных приемов, например, логарифмированием, заменой переменных и пр.

Последовательность действий при поиске зависимости в совместных измерениях такова:

- определяют вид функциональной зависимости (как правило, задается априори исходя из тех или иных соображений);
- выбирают метод построения зависимости;
- вычисляют оценки параметров зависимости выбранного типа;
- оценивают погрешности полученной зависимости;
- оценивают адекватность зависимости.

Существует множество методов, в том числе и статистических, построения зависимостей. Наиболее часто применяют классический метод наименьших квадратов (МНК). Следует, однако, помнить, что он дает несмещенные и эффективные оценки только при нулевой погрешности (пренебрежимо малой) аргументов. Это условие выполняется не всегда и тогда применение МНК обосновано при ряде оговорок и некоторых его модернизациях.

Суть МНК при определении функциональной зависимости вида $y_i = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(x_i)$ сводится к минимизации функционала

$$\min Q = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(x_i) \right]^2 .$$

Наличие систематических составляющих погрешности измерений y_i, как и наличие погрешностей аргументов, делает МНК не оптимальным. Но это и многие другие ограничения, все же не делают этот метод менее распространенным в практике измерений, в том числе и измерений высокой точности.

Рассмотрение методов построения эмпирических зависимостей МНК в общих случаях не входит в нашу задачу, поэтому обратимся к простейшему и, в то же время, практически важному случаю построения линейной функции $y = a + bx$. Полагаем, что значения x точно известны. Величины y_i измерены в каждой точке x_i (в том числе и многократно, т.е. произведено по n_i измерений) с погрешностью, которая может включать случайную и систематическую составляющие. В этом случае искомые величины определяются в результате решения системы линейных уравнений:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_j x_{ij} \, (j = 1 \ldots m; i = 1 \ldots n) ,$$

где j – число коэффициентов в линейном уравнении, i – количество измерений.

Если число измерений y больше числа неизвестных коэффициентов a_j, то эта система не имеет однозначных решений. Поэтому уравнения системы называют условными.

При нормальном распределении случайной погрешности оценки по методу максимального правдоподобия и по методу наименьших квадратов совпадают. Условие максимума функции правдоподобия $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{j=1}^{m}a_i x_{ij}\right)^2=\min$, что соответствует требованиям МНК.

Для нахождения оценок a_{0j}, удовлетворяющих этому требованию, необходимо равенство нулю всех частных производных этой функции по a_{0j}. Оценки находят решением системы линейных (нормальных) уравнений: $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{j=1}^{m}a_j x_{ij}\right)^2 x_{ij}=0$. Система нормальных уравнений решается методом определителей $a_{0j} = \Delta_j/\Delta$, где Δ – определитель матрицы $x_i x_j$, а определитель Δ_j получается из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Если измерения y многократные в каждой точке x_i, т. е. производится k измерений y и каждое среднее значение $\bar{y}_i$ в каждой точке x_i имеет свой вес $\omega_i = n_i/S^2_{yi}$. При наличии случайной и систематической погрешностей y_i вес $\omega_i=\left[\frac{S_i^2}{n_i}+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{t}\theta_{ij}^2\right]^{-1}$.

Оценки МНК коэффициентов линейной функции имеют вид

$$b_0=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2};\; a_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}.$$

Здесь указаны средние значения $\bar{y}_i$ в каждой точке x_i, что означает, что мы сначала произвели усреднение y в каждой точке x_i. Еще раз напомним, что нами сделано допущение о том, что значения x_i известны точно.

Оценку σ_y можно сделать по совокупности отклонений $\bar{y}_i$ от вычисленных по формуле оценок $\hat{y}_i$:

$$S_y=\hat{\sigma}_y=\sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_i-\hat{y}_i)^2}.$$

Оценки СКО коэффициентов определяют по формулам

$$S_{ao}=S_y\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2/\Delta};\; S_{bo}=S_y\sqrt{n/\Delta};\; \Delta=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$

Совокупные измерения – это одновременные измерения однородных и одноименных величин, при которых искомые значения величин находят из решения системы связывающих их уравнений. Примерами совокупных измерений являются калибровки наборов мер или шкал приборов или определение значений сопротивлений резисторов по измерениям сопротивлений участков цепи, в которые эти резисторы включены (рис. 3.1).

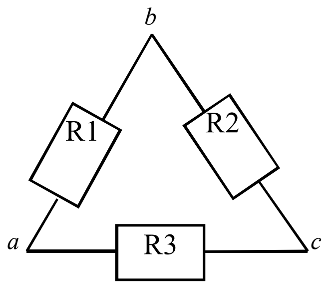


Рис.3.1. Пример совокупных измерений при определении сопротивлений резисторов

Измеряя сопротивления R_{ab}, R_{ac} и R_{bc} между вершинами треугольника, в котором соединены резисторы $R1$, $R2$ и $R3$, и решая систему уравнений, можно установить искомые значения сопротивлений резисторов методом совокупных измерений:

$R_{ab} = [R_1(R_2+R_3)]/(R_1+R_2+R_3)$;

$R_{ac} = [R_3(R_1+R_2)]/(R_1+R_2+R_3)$;

$R_{bc} = [R_2(R_1+R_3)]/(R_1+R_2+R_3)$.

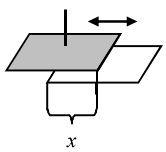
В общем случае уравнения измерений при совокупных измерениях одноименных величин x_j имеют вид $y_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ji} x_j$, где коэффициенты c_{ij} принимают значения 0, ±1. Число измерений i= 1.....m должно быть равно или больше числа одноименных величин j = =1.....k.

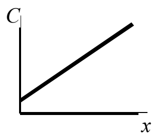
Система уравнений измерений обычно решается МНК. Особенности применений МНК в совместных или совокупных измерениях связаны с тем, что в уравнениях совместных измерений коэффициенты $f_j(x_i)$ могут быть сложными, но их, как правило, не очень много. Напротив, в совокупных измерениях коэффициенты c_{ij} просты, но их может быть очень много, что приводит к необходимости обращения со сложными матрицами.

Вообще говоря, задача обработки результатов совместных и совокупных измерений относится к регрессионному анализу, поскольку в этих измерениях проводится построение зависимостей.

Следует отметить, что косвенные, совместные и совокупные измерения сближает их общее свойство: их результаты рассчитывают по известным функциональным зависимостям между измеряемыми величинами и величинами, определяемыми прямыми измерениями. Различие между этими измерениями заключается лишь в виде функциональной зависимости, используемой при расчетах. При косвенных измерениях эта зависимость выражается одним уравнением в явном виде, при совместных и совокупных – системой неявных уравнений, по которым ищется эмпирическая зависимость между одноименными (совокупные измерения) и неодноименными (совместные измерения) величинами. На этом основании в некоторых работах совместные измерения интерпретируются как обобщение косвенных, а совокупные – прямых измерений.

Пример 91. В емкостном датчике линейных перемещений использована зависимость емкости C от площади обкладок S. Уравнение преобразования такого датчика имеет вид $C = \varepsilon_0\varepsilon_r S/\delta$, где C – емкость; ε_0 – диэлектрическая постоянная; ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость; S – площадь обкладки (пластины) конденсатора; δ – толщина диэлектрической прослойки между пластинами. Из уравнения следует, что для измерения линейного перемещения может быть использовано изменение площади пластин, пропорциональное перемещению x (см. рисунок).





x_i, мм	1	2	3
$\overline{C_i}$, пФ	10	16	19

Определить вид эмпирической функции преобразования датчика и вычислить оценки ее параметров (коэффициентов), используя данные совместных измерений C и x, приведенные в таблице, а также учитывая, что в каждой точке x_i произведены многократные измерения C_i и найдены средние значения $\overline{C_i}$ с относительной погрешностью среднего $S_{\overline{C_i}}$ = ± 1%. Привести градуировочную характеристику датчика перемещений.

Решение. Поскольку отношение C/S – величина постоянная, то характеристика датчика, измеряющего линейное перемещение, линейна, если изменение площади S – линейная функция перемещения (пластины прямоугольной формы). В таком случае функцию преобразования перемещения в выходной сигнал (емкость) следует определить как $C = a_0 - bx$, где b – коэффициент, зависящий от диэлектрических свойств зазора между пластинами и ширины пластин (размер, перпендикулярный направлению перемещения).

Вычислим оценки коэффициентов МНК по соотношениям

$$b_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i C_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} C_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \quad a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i C_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

$a_0 = (14\cdot45 - 6\cdot99)/(42 - 36) = 6$ [пФ];

$b_0 = (3\cdot99 - 6\cdot45)/(42 - 36) = 4{,}5$ [пФ/мм];

Эмпирическую функцию преобразования запишем в виде C = =(6 + 4,5x) пФ, где x – перемещение, мм.
СКО оценим по совокупности отклонений $\overline{C_\imath}$ от вычисленных по формуле оценок $\widehat{C}_i$:

$$S_C = \widehat{\sigma}_C = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(\overline{C}_i - \widehat{C}_i)^2}$$, S_C = 1,22 ≈ 1,2 пФ.

Оценки СКО коэффициентов определим по формулам

$$S_{ao} = S_C\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2/\Delta};\ S_{bo} = S_C\sqrt{n/\Delta};\ \Delta = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2;$$

S_{ao} ≈ 1,8 пФ, S_{bo} ≈ 0,9 пФ.

Окончательно эмпирическую функцию преобразования запишем в виде C = (6 + 4,5x) пФ, S_C ± 1,2 пФ. Градуировочная характеристика датчика перемещений будет иметь вид x = (0,22C – –1,33) мм.

Пример 92. В манометрическом термометре температура определяется по давлению газа, занимающего постоянный объем. В предположении об идеальности газа уравнение преобразования термометра основано на уравнении идеального газа $pV = RT$. Определить вид градуировочной характеристики термометра и вычислить оценки ее параметров (коэффициентов), используя данные совместных измерений T и p, приведенные в таблице.

p, мм рт. ст.	65	75	85	95	105
t, ^{0}C	-20	17	42	94	127

Решение. С учетом того, что измерялась неабсолютная температура, запишем градуировочную характеристику в виде $t = a + +bP$.

Определим оценки коэффициентов МНК по соотношениям:

$$b_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} P_i t_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{i=1}^{n} t_i}{n\sum_{i=1}^{n} P_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right)^2};\ a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^2 \sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{i=1}^{n} P_i t_i}{n\sum_{i=1}^{n} P_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right)^2}.$$

Вычислим необходимые суммы: $\sum P_i$ = 425; $\sum P^2_i$ = 37125; $(\sum P_i)^2$ = 180625; $\sum t_i$ = 260; $\sum P_i t_i$ = 25810;

a_0 = – 263,35 ^{0}C;

b_0 = 3,71 ^{0}C/мм рт. ст.

Градуировочную характеристику запишем в виде t = (– 263,35 + +3,71P) ^{0}C.
Оценку СКО произведем по совокупности отклонений t от вычисленных оценок $\widehat{t}_i$:

$$S_t = \widehat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \widehat{t}_i)^2}$$, S_t = 6,7 ^{0}C.

Оценки СКО коэффициентов определим по формулам

$$S_{ao} = S_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n} P_i^2/\Delta};\ S_{bo} = S_t\sqrt{n/\Delta};\ \Delta = n\sum_{i=1}^{n} P_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right)^2.$$

Δ = 5000; S_{ao} ≈ 18 ^{0}C, S_{bo} ≈ 0.
Окончательно эмпирическую функцию преобразования запишем в виде t = (–263,35 + 3,71P), S_t ± 6,7 ^{0}C. Коэффициент a = =(–263 ± 18)^{0}C, т.е. с вероятностью 68% находится в пределах от –245^{0}C до –281^{0}C, а точное значение этого коэффициента, дающего значение абсолютного нуля по шкале Цельсия, должно быть равно –273,15^{0}C ≡ 0K, что укладывается в полученный диапазон значений S_{bo}.

Пример 93. Зависимость термоэлектродвижущей силы (ТЭДС) E от разницы температур на концах термопары ($T_2 - T_1$), образованной цепью из проводников A и B, в рамках представлений теории электронной проводимости имеет вид $E = \frac{\kappa}{e}\int_{T_1}^{T_2} \ln\frac{n_A}{n_B} dT$, где k – постоянная Больцмана; e – заряд электрона; n_A, n_B – концентрация свободных электронов в проводниках A и B.

Это выражение для многих практически важных случаев может быть упрощено до линейной зависимости. С целью построения функции преобразования термопары из сплавов «никель/хром» – «никель/алюминий» произведены совместные измерения температуры и ТЭДС. Холодный спай термопары помещен в сосуд с тающим льдом.

Определить вид эмпирической функции преобразования термопары и вычислить оценки ее параметров (коэффициентов), используя данные совместных измерений t и E, приведенные в таблице. Определить вид градуировочной характеристики термопары.

t, ^{0}C	100	200	300	400	500
E, мВ	4,1	8,1	12,5	16,2	21,0

Решение. При незначительном изменении концентрации свободных электронов в проводниках A и B эмпирическая функция преобразования термопары может быть представлена в виде $E = bt$. В данном случае значение t эквивалентно разнице температур спаев термопары, так как холодный спай находится при температуре 0^{0}C.

Тогда можно записать систему уравнений $E_i = bt_i$, откуда коэффициент b может быть определен по отношению $b = \sum E_i/\sum t_i =$ =61,9/1500 = 0,0413 мВ/^{0}C. Уравнение преобразования: $E =$ =0,0413t мВ. Оценка СКО $S_E = \hat{\sigma}_E = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(E_i - \hat{E}_i)^2}$, S_E = 0,21 мВ. При доверительной вероятности 0,68 E = (0,0413 t ± 0,21) мВ.

Градуировочная характеристика – это функция, обратная функции преобразования. Следовательно, ее можно записать в виде $t = 24{,}21E$ ^{0}C.

Пример 94. Принцип действия проводникового термометра сопротивления основан на зависимости электрического сопротивления от температуры: $R(t) = R_0(t_0)[1 + a(t - t_0)]$, где a – температурный коэффициент сопротивления. Для построения эмпирической зависимости $R(t)$ проведены совместные измерения R и t платинового термометра сопротивления 100 Ом (при 0^{0}C) в нескольких реперных точках МТШ-90. Определить ее вид и оценить параметры, используя экспериментальные данные, приведенные в таблице. Вычислить W_{100} и сделать заключение о пригодности термометра, учитывая, что допускаемый диапазон значений W_{100} находится в пределах от 1,385 до 1,392.

t, ^{0}C	0,01 (тройная точка воды)	29,7646 (точка плавления Ga)	156,5985 (точка затвердевания In)
R, Ом	100,00	111,6	161,07

Решение. Для упрощения вычислений запишем функцию преобразования в виде $R = a + bt$.

Определим оценки коэффициентов МНК по соотношениям

$$b_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} t_i R_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} R_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}; \quad a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \sum_{i=1}^{n} R_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} t_i R_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}.$$

Вычислим необходимые суммы: $\sum t_i = 186{,}4$; $\sum t^2_i = 34730$; $(\sum t_i)^2 = 25409$; $\sum R_i = 372{,}67$; $\sum R_i t_i = 28546$; $\Delta = 41497$;

$$a_0 = 99{,}98 \text{ Ом}; \; b_0 = 0{,}39 \text{ Ом/}^0\text{C}.$$

Эмпирическую функцию преобразования запишем в виде $R =$ =99,98 + 0,39t = 99,98(1 + 0,0039t).

СКО оценим по совокупности отклонений R_i от вычисленных по формуле оценок $\hat{R}_i$:

$$S_R = \hat{\sigma}_R = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \hat{R}_i)^2}$$, S_R = 0,03 Ом.

Оценки СКО коэффициентов определим по формулам

$$S_{ao}=S_R\sqrt{\sum_{i=1}^{n}t_i^2/\Delta};\ S_{bo}=S_R\sqrt{n/\Delta};\ \Delta=n\sum_{i=1}^{n}t_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2.$$

$S_{ao}\approx 0{,}03$ Ом, $S_{bo}\approx 0$.

Окончательно эмпирическую функцию преобразования запишем в виде R = (99,98 + 0,39t) Ом, S_R ± 0,03 Ом. Коэффициент a = (99,98 ± 0,03) Ом, т.е. с относительной погрешностью менее 0,03% соответствует номинальному сопротивлению термометра (100 Ом).

Вычислим $W_{100} = R_{100}/R_0$ = 138,98/99,98 = 1,39, что укладывается в заданный интервал.

Пример 95. В дилатометрическом датчике температуры используется эффект удлинения стержня при его нагревании: $l(t) = l_0[1 + a(t - t_0)]$, где a – температурный коэффициент линейного расширения. Для определения ТКЛР медно-никелевого сплава (константан) проведены совместные измерения длины тонкого стержня и его температуры в двух точках: при комнатной температуре и в точке затвердевания золота. Определить функцию преобразования температуры в удлинение по измеренному значению ТКЛР.

t_i, ^{0}C	20,5	1064,18
l_i, мм	100,10	101,95

Решение. Для определения ТКЛР удобно преобразовать выражение для $l(t)$: $(l(t) - l_0)/l_0 = a(t - t_0)$. Проведя замену переменных $\varepsilon = (l(t) - l_0)/l_0$ и $\theta = (t - t_0)$, получаем простую функцию преобразования: $\varepsilon = a\theta$. Тогда можно записать систему уравнений: $\varepsilon_i = a\theta_i$. Откуда коэффициент a может быть определен по отношению $a = =\sum\varepsilon_i/\sum\theta_i$ = 0,0195/1043,68 = $18{,}6810^{-6}\ ^0C^{-1}$. Уравнение преобразования: $\varepsilon = 18{,}6810^{-6}\theta$. Возвратимся к старым переменным $l(t) = =100{,}10[1 + 18{,}68(t - t_0)]$.

Отклонение измеренной длины от ее оценки по полученному значению ТКЛР равно Δl = 101,95 – 102,05 = – 0,10 мм, что на уровне измеренного удлинения составляет 0,1/1,85 = 0,054 или 5,4%.

Пример 96. В расходомере с осевой турбинкой объемный расход Q преобразуется в скорость вращения турбинки n, которая регистрируется счетчиком оборотов, в виде импульсов, частота которых пропорциональна скорости вращения турбинки: $n = Q/SH$, где S – площадь живого сечения потока в зоне лопастей турбинки; H – ход винтовой нарезки лопастей. В этом соотношении не учитываются: наличие момента инерции ротора, завихрения в потоке, неравномерное распределение скоростей по сечению потока, вязкость среды, сжимаемость, сила трения в опорах турбинки и т.п. Указанные явления влияют на метрологические характеристики расходомера и сужают линейный диапазон измерений. Поэтому важно получение эмпирической функции преобразования для таких устройств.

Определить функцию преобразования расходомера по данным совместных измерений, приведенным в таблице.

Q, м^{3}ч$^{-1}$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
n, об/с	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ν, мин$^{-1}$	6	11,5	18,5	24,5	29,5	36,5	41,5	47,5	54,5

Решение. Функция преобразования расхода в частоту импульсов проста: $\nu = aQ$. Тогда можно записать систему уравнений: $\nu_i = =aQ_i$. Откуда коэффициент a может быть определен по отношению: $a = \sum\nu_i/\sum Q_i$ = 270/45 = 6. Уравнение преобразования: $\nu = 6Q$.

Градуировочная характеристика – это функция, обратная функции преобразования. Следовательно, можно записать ее в виде $Q = =0{,}167\nu$ м^{3}ч$^{-1}$.

Оценку СКО определим из соотношения $S_\nu=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\nu_i-\hat{\nu}_i)^2}$; S_ν = 0,47. При доверительной вероятности 0,68 $\nu = (6Q\pm0{,}47)$ мин$^{-1}$.

Пример 97. В расходомере с сужающим устройством (диафрагма) расход жидкости преобразуется в перепад давления на диафрагме, которая представляет собой местное сопротивление потоку: $\Delta P^{1/2} = Q/K$, где K – коэффициент, зависящий от геометрии рабочего участка трубопровода, плотности и режима течения жидкости. Найти градуировочную характеристику расходомера по результатам проливки в образцовом стенде, приведенным в таблице. Оценить неопределенность измерений расхода этим расходомером при P = 0,99.

Q, м^3/ч	2	3	4	5
ΔP, кПа	10,0	22,0	40,5	62,0

Решение. Градуировочная характеристика расходомера – функция, обратная функции преобразования: $Q = K\ \Delta P^{1/2}$. Для линеаризации функции произведем замену переменной: $X_{\Delta P} = \Delta P^{1/2}$. Тогда $Q = KX_{\Delta P}$. Коэффициент K может быть определен по отношению $K = \sum Q_i / \sum X_{\Delta P} = 14/22{,}08 = 0{,}634$.

Градуировочная характеристика: $Q = 0{,}634\Delta P^{1/2}$.

Оценка СКО $S_Q = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Q_i - \hat{Q}_i)^2}$, S_Q = 0,026 м^3/ч. При доверительной вероятности 0,68 $Q = (0{,}634\Delta P^{1/2} \pm 0{,}026)$ м^3/ч.

Стандартная неопределенность измерений по типу A равна $u_A = S_Q$ = 0,026 м^3/ч. При P = 0,99 расширенная неопределенность $U_Q = 3{\cdot}0{,}026 = 0{,}078$ м^3/ч.

Пример 98. Статическая функция преобразования тензорезисторного датчика перемещений может быть представлена линейной функцией напряжения в диагонали моста из тензорезисторов U от перемещения конца упругой балки L.

Определить вид функции преобразования датчика по результатам измерений задаваемого перемещения и выходного сигнала датчика, приведенным в таблице. Оценить погрешности и неопределенности измерений при P = 0,99.

L, мм	0	1	2	3	4
U, В	0,05	1,50	3,10	4,60	6,00

Решение. Запишем функцию преобразования в виде $U = a + bL$.

Определим оценки коэффициентов МНК по соотношениям

$$b_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} L_i U_i - \sum_{i=1}^{n} L_i \sum_{i=1}^{n} U_i}{n\sum_{i=1}^{n} L_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)^2};\ a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i^2 \sum_{i=1}^{n} U_i - \sum_{i=1}^{n} L_i \sum_{i=1}^{n} L_i U_i}{n\sum_{i=1}^{n} L_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)^2}.$$

Вычислим необходимые суммы: $\sum L_i = 10$; $\sum L^2_i = 30$; $(\sum L_i)^2 = =100$; $\sum U_i = 15{,}25$; $\sum U_i L_i = 45{,}5$; $\Delta = 50$;

$$a_0 = 0{,}05\ \text{В};\ b_0 = 1{,}5\ \text{В/мм}.$$

Эмпирическую функцию преобразования запишем в виде $U = =0{,}05 + 1{,}5L = 0{,}05(1 + 0{,}075L)$ В.

Оценку СКО произведем по совокупности отклонений U_i от вычисленных по формуле оценок $\hat{U}_i$:

$$S_U = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \hat{U}_i)^2}\ ;\ S_U = 0{,}065\ \text{В}.$$

Оценки СКО коэффициентов определим по формулам

$$S_{ao} = S_U\sqrt{\sum_{i=1}^{n} L_i^2/\Delta};\ S_{bo} = S_U\sqrt{n/\Delta};\ \Delta = n\sum_{i=1}^{n} L_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right)^2.$$

$S_{ao} \approx 0{,}05$ В, $S_{bo} \approx 0$.

Окончательно эмпирическую функцию преобразования запишем в виде $U = (0{,}05 + 1{,}5L)$ В, $S_U = \pm\ 0{,}05$ В.

Стандартная неопределенность по типу A $u_A = S_U$ = 0,065 В. Расширенная неопределенность при P = 0,99 $U_U = 3{\cdot}0{,}065 \approx 0{,}2$ В.

Пример 99. Для измерения магнитной индукции применяется датчик Холла. Уравнение преобразования магнитной индукции B в выходное напряжение датчика U основано на пропорциональной зависимости сигнала датчика от интенсивности магнитного поля и силы тока питания. Датчик прокалибровали в магнитных полях известной интенсивности.

Определить вид функции преобразования и характеристики погрешности и оценить неопределенности измерений этим датчиком при $P = 0{,}95$.

B, мТл	20	30	40	50
U, мВ	40,5	59,5	80,5	99,5

Решение. При постоянных параметрах питания датчика Холла $U = KB$. Откуда коэффициент K может быть определен по отношению $K = \sum U_i / \sum B_i = 280/140 = 2$. Уравнение преобразования: $U = {=}2B$ мВ.

Градуировочная характеристика – это функция, обратная функции преобразования. Следовательно, ее можно записать в виде $B = 0{,}5U$ мТл.

Оценку СКО определим из соотношения $S_U = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \widehat{U}_i)^2}$; $S_U \approx 0{,}6$ мВ. При доверительной вероятности 0,68 $U = (2{,}0B \pm 0{,}6)$ мВ.

Стандартная неопределенность измерений по типу A $u_A = S_U = {=}0{,}6$ мВ. При $P = 0{,}95$ расширенная неопределенность $U_U = 2 \cdot 0{,}6 = {=}1{,}2$ мВ.

Пример 100. В дифференциальном трансформаторном преобразователе (ДТП) линейных перемещений с ферромагнитным сердечником осевое перемещение сердечника L преобразуется в изменение индуктивности вторичных обмоток и, в конечном счете, в изменение разницы падения напряжения U на них. При комнатной температуре функция преобразования ДТП обладает высокой линейностью.

Определить вид функции преобразования и характеристики датчика, погрешности и оценить неопределенности измерений ($P = 0{,}95$) по данным, приведенным в таблице.

L, мм	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
U, В	1,05	1,95	3,05	4,00	4,95

Решение. Функция преобразования датчика имеет вид $U = KL$.

Откуда коэффициент K может быть определен по отношению $K = \sum U_i / \sum L_i = 15/15 = 1$. Уравнение преобразования: $U = 1L$ В.

Градуировочная характеристика – это функция, обратная функции преобразования. Следовательно, ее можно записать в виде $L = 0{,}1U$ мм.

Оценку СКО определим из соотношения $S_U = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \widehat{U}_i)^2}$; $S_U = 0{,}05$ В. При доверительной вероятности 0,68 $U = (1{,}00L \pm 0{,}05)$ В.

Стандартная неопределенность измерений по типу A $u_\text{А} = S_U = {=}0{,}05$ В. При $P = 0{,}95$ расширенная неопределенность $U_U = 2 \cdot 0{,}05 = {=}0{,}1$ В.

4. РАЗЛИЧИЯ В ОЦЕНИВАНИИ ПОГРЕШНОСТИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

При сопоставлении погрешности и неопределенности рекомендуется руководствоваться схемой аналогий (табл. 4.1) (РМГ 43-2001 Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений»).

Таблица 4.1

Таблица аналогий

Погрешность	Неопределенность
СКО случайной погрешности S_i	Стандартная неопределенность по типу *A* u_{Ai}
СКО, характеризующее неисключенную систематическую погрешность, θ_i	Стандартная неопределенность по типу *B* u_{Bi}
СКО, характеризующее суммарную погрешность, S_Σ	Суммарная стандартная неопределенность u_C
Доверительная граница погрешности Δ_P	Расширенная неопределенность U_P = $=ku_C$, где k – коэффициент охвата
Оценивание погрешности *i*-го результата	Оценивание неопределенности *i*-го результата
$S_i=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$	$u_{A,i}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$
$S_{\theta i}=\sqrt{\theta_i^2/3}$	$u_{B,i}=b_i/\sqrt{3}$ (b_i – симметричные границы отклонения результата измерений от измеряемой величины)

Окончание табл. 4.1

Погрешность	Неопределенность
$S_{\Sigma i}=\sqrt{S_i^2+\theta_i^2/3}$	$u_{c,i}=\sqrt{u_{Ai}^2+u_{Bi}^2}=\sqrt{u_{Ai}+b_i^2/3}$
$\Delta_P = t_P(f_{эф})S_\Sigma$ ($f_{эф}$ – эффективное число степеней свободы)	$U_p = t_p(\nu_{эф})u_c$ ($\nu_{эф}$ – эффективное число степеней свободы); $U_{0,95} = 2u_C$; $U_{0,99} = 3u_C$ для нормального закона распределения; $U_{0,95}$ = $1,65u_C$; $U_{0,99} = 1,71u_C$ для равномерного закона распределения

Рассматривая попарно соотношения для вычисления погрешности и неопределенности, нетрудно заметить разницу между двумя подходами.

Следует подчеркнуть, что здесь и далее мы анализируем погрешности прямых измерений, при косвенных измерениях необходимо учитывать коэффициенты влияния, получаемые по правилам дифференцирования уравнения измерений (см. примеры).

На практике для сравнения точности результатов измерений или методик выполнения измерений вообще, получаемой в различных подходах, рекомендуются две схемы перехода от полученных (традиционных) показателей точности – погрешностей к неопределенностям.

Первая схема. При известных:

- результате измерений y;
- СКО случайной погрешности измерений S;
- доверительной границе неисключенной систематической погрешности измерений θ_p;
- числе составляющих неисключенной систематической погрешности $m_{сист}$;
- числе измерений n

вычисляют (для того же результата y):

$u_A=S;$

$u_B=\frac{\theta_p}{k\sqrt{3}}$, где k = 1,1 при P = 0,95 и k = 1,4 при P = 0,99, $m_{сист}$>4;

$u_C=\sqrt{u_A^2+u_B^2};$

$\nu_{\text{эф}} = (n-1)\left[1 + u_B^2 / u_A^2\right]^2$; $U_P = t_p(\nu_{\text{эф}}) u_C.$

В косвенных измерениях

$$u_{\text{c}} = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right)^2 u^2(\hat{Q}_i)}\ ,$$

$\nu_{\text{эф}} = \dfrac{u_{\text{c}}^4}{\sum \left(\dfrac{\partial f}{\partial Q_i}\right)^4 \dfrac{u^4(Q_i)}{\nu_i}}$, причем $\nu = n - 1$ для неопределенностей по типу A и $\nu = \infty$ для неопределенностей по типу B.

Вторая схема. При известных:

- результате измерений y;
- доверительной границе погрешности измерений Δ_p;
- доверительной вероятности P

вычисляют (для того же результата y)

$$U_p = \Delta_p;\ u_C = \Delta_p / Z_p,$$

где Z_p – квантиль нормального распределения.

Из этой схемы ясно, что, имея только значение Δ_p невозможно найти оценки u_A и u_B.

Практика показывает, что различия в интервальных оценках погрешности и неопределенности измерений (Δ_p и U_p), как правило, не очень велики и обычно имеют место при обработке результатов косвенных измерений.

Приведенные выше рекомендации из РМГ 43-2001, как, по-видимому, и сам упомянутый документ, отражают состояние некоторого (возможно очень длительного) «переходного» периода совместного существования двух разных подходов, в течение которого будет происходить «привыкание» к концепции неопределенности, углубление ее проработки и понимания (без тотального отрицания методов и достижений теории погрешности измерений). В конце концов, будет определено место каждого из этих подходов в современной метрологии.

Последовательность действий при оценивании и выражении неопределенности измерений, рекомендуемая "Руководством по выражению неопределенности измерения" такова:

1.Выразите математически зависимость между измеряемой величиной Y и входными величинами X_i , от которых она зависит $Y=f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$. Функция f должна содержать каждую величину, включая все поправки и поправочные множители, которая может внести значительную составляющую в неопределенность результата измерения (см. пп. 4.1.1 и 4.1.2 Руководства).

2.Определите x_i – значение входной величины X_i , оцененное либо на основе статистического анализа рядов наблюдений или другими средствами (см. п. 4.1.3).

3.Оцените *стандартную неопределенность* $u(x_i)$ каждой входной оценки x_i. Для входной оценки, полученной из статистического анализа рядов наблюдений, стандартная неопределенность оценивается, как описано в подразд. 4.2 (*оценивание стандартной неопределенности по типу А*). Для входной оценки, полученной другими средствами, стандартная неопределенность $u(x_i)$ оценивается так, как описано в подразд. 4.3 (*оценивание стандартной неопределенности по типу В*).

4. Если значения каких-либо входных величин коррелированны, оцените их ковариации (см. 5.2).

5.Рассчитайте результат измерения, т. е. оценку y измеряемой величины Y из функциональной зависимости f, используя для входных величин X_i оценки x_i, полученные на этапе 2 (см. 4.1.4).

6.Определите *суммарную стандартную неопределенность* $u_c(y)$ результата измерения y из стандартных неопределенностей и ковариаций, связанных с входными оценками, как описано в разд. 5. Если измерения определяют одновременно более одной входной величины, рассчитайте их ковариации (см. п. 7.2.5).

7.Если требуется дать *расширенную неопределенность* U, ее цель – обеспечение интервала от $y - U$ до $y + U$, в пределах которого, предположительно, находится большая часть распределения значений, которые можно с достаточным основанием приписать измеряемой величине *Y*, умножьте суммарную стандартную неопределенность $u_C(y)$ *на коэффициент охвата k*, обычно находящийся в диапазоне от 2 до 3, чтобы получить $U = ku_C(y)$. Выберите *k* исходя из желаемого уровня доверия, требуемого для интервала (см. подразд. 6.2 и 6.3).

8.Сообщите результат измерения *y* вместе с его суммарной стандартной неопределенностью $u_C(y)$ или расширенной неопределенностью *U* , как рассмотрено в пп. 7.2.1 и 7.2.3; используйте одну из форм, как указано в пп. 7.2.2 и 7.2.4. Опишите, как подчеркнуто также в разд. 7, каким образом были получены *y* и $u_C(y)$ или *U*.

5. ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ. ЭНТРОПИЙНАЯ ВЕЛИЧИНА ПОГРЕШНОСТИ

Информационная теория измерений основана на теории информации К.Шеннона, согласно которой информация, подобно физической величине, может быть измерена и оценена. Для оценки систематической составляющей, как и в теории математической статистики, используется первый начальный момент, т.е. математическое ожидание, а вот центрированные случайные составляющие оцениваются не центральными моментами более высоких порядков как в теории вероятностей, а единственным моментом, определяемым для непрерывного распределения по формуле

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x) dx$$

и называемым ***энтропией***. Энтропия служит мерой неопределенности величины *x*. Чем меньше $H(x)$, тем точнее определена *x*.

Энтропия дискретной случайной величины зависит не от того, какие именно значения она принимает, а от того, сколько этих значений и какова их вероятность. Если случайная величина имеет *n* равновероятных значений $p_i=1/n$, тогда

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i = -n\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = \ln n\ .$$

Из этого следует, что чем больше число равновероятных значений величины, тем менее она определена и тем больше ее энтропия.

В информационной теории измерений остающаяся неопределенность в знании величины *x* после получения результата измерения $x_д$ характеризуется так называемой ***условной энтропией*** (при условии, что $x_д$ известно) $H(x/x_д)$.

Рассмотрим пример с равномерно распределенной величиной. Предположим, что искомая величина равномерно распределена в интервале $x_1 < x < x_2$ и равна нулю за его пределами. Плотность вероятности распределения $p(x)=1/(x_2-x_1)$. Произведено измерение величины и получено значение $x_д$ с погрешностью прибора $\pm\Delta$. Значение $x_д$ находится внутри этого интервала с вероятностью $p(x)=1/2\Delta$.

Энтропия величины до её измерения

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x_2-x_1} \ln\frac{1}{x_2-x_1} dx = \ln(x_2-x_1)\ .$$

Условная энтропия после измерения равна

$$H(x/x_д) = \int_{x_д-\Delta}^{x_д+\Delta} \frac{1}{2\Delta}\ln\frac{1}{2\Delta} dx = \ln 2\Delta\ .$$

В результате измерения о величине получена информация, равная $I = H(x) - H(x/x_д)$, т.е. чем точнее измерена величина *x*, тем больше получено о ней информации.

Приведенный пример описывает сущность энтропийного анализа результата измерения.

Энтропийным интервалом неопределенности результата измерения называют интервал *d*, определяемый соотношением

$$H(x/x_д) = \ln d = \ln 2\Delta_э.$$

Основное достоинство энтропийного подхода заключается в том, что интервал d может быть вычислен для любого закона распределения погрешности, без дополнительных условий по выбору доверительной вероятности.

Величина $\Delta_э = 1/2d$ называется энтропийным значением погрешности. Соотношения между $\Delta_э$ и СКО погрешности (или σ) различны для разных законов распределений и определяются значениями энтропийного коэффициента $K_э$: $\Delta_э = K_э\sigma$.

Коэффициент $K_э$ вычисляется по интегралу $H(x/x_д)$ для конкретного распределения (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Энтропийные коэффициенты погрешности для различных распределений

Распределение	Показатель степени α	Эксцесс ε	Энтропийный коэффициент $K_э$
Равномерное	∞	1,8	1,73($\sqrt{3}$)
Трапецеидальные	>2	1,9...2,3	1,8...2,0
Треугольное (Симпсона)	-	2,4	2,02 ($\sqrt{6e}/2$)
Лапласа	1	6	1,92
Гаусса (нормальное)	2	3	2,066 ($\sqrt{2\pi e}$)
Коши	-	0	0
Стьюдента, ν=4	-	∞	1,9
Стьюдента, ν=10	-	4	2,047
Стьюдента, $\nu=\infty$	-	3	2,066
Дискретное двузначное	-	1	0
Арксинусоидальное	-	1,5	1,11

Из таблицы, в частности, следует, что для распределения Коши невозможно оценить погрешность методами теории вероятности ($\sigma = \infty$), но информационная теория позволяет это сделать, так как при $p(x)=1/\pi(x^2+1)$ $H(x/x_д)=\ln n+2\ln 2=2,52$ и $\Delta_э=0,5\exp[H(x/x_д)]= =0,5\exp 2,52$.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Т а б л и ц а   П 1

Значения интегральной функции Лапласа $\Phi(t) = \frac{2}{2\pi}\int_0^t e^{-\frac{\delta^2}{2}} d\delta$ **при** $t > 0$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,000	.95	.6579	.85	.9357	.75	.9940
.05	.0399	1,00	.6827	.90	.9426	.80	.9949
.10	.0797	.05	.7063	.95	.9488	.85	.9956
.15	.1192	.10	.7287	2,00	.9545	.90	.9963
.20	.1585	.15	.7499	.05	.9596	.95	.9968
.25	.1974	.20	.7699	.10	.9643	3,0	.9973
.30	.2357	.25	.7887	.15	.9684	.1	.9980
.35	.2737	.30	.8064	.20	.9722	.2	.9986
.40	.3108	.35	.8230	.25	.9756	.3	.99904
.45	.3473	.40	.8385	.30	.9786	.4	.99932
.50	3829	.45	.8529	.35	.9812	.5	.99954
.55	.4177	.50	.8664	.40	.9836	.6	.99968
.60	.4515	.55	.8789	.45	.9857	.7	.99978
.65	.4843	.60	.8904	.50	.9876	.8	.99986
.70	.5161	.65	.9011	.55	.9892	.9	.99990
.75	.5467	.70	.9109	.60	.9907	4,0	.999936
.80	.5763	.75	.9199	.65	.9920	4,5	.999994
.85	.6047	.80	.9281	.70	.9931	5,0	.9999994
.90	.6319						

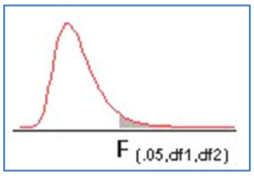
Таблица П2

Значения коэффициента t_p для случайной величины, имеющей распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы

k	P											
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,543	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,129	0,260	0,396	0,540	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,1256	0,2534	0,3853	0,5244	0,6745	0,8416	1,03643	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758

Таблица П3

Распределение Фишера (F-распределение) для уровня значимости α = 0,05



k_1	k_2																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.5	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	246.0	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.39	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.014	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786	8.745	8.703	8.660	8.639	8.617	8.594	8.572	8.549	8.526
4	7.709	6.944	6.592	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.912	5.858	5.803	5.774	5.746	5.717	5.688	5.658	5.628
5	6.608	5.786	5.410	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.773	4.735	4.678	4.619	4.558	4.527	4.496	4.464	4.431	4.399	4.365
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	3.400	3.938	3.874	3.842	3.808	3.774	3.740	3.705	3.669
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.575	3.511	3.444	3.411	3.376	3.340	3.304	3.267	3.230
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.688	3.581	3.501	3.438	3.388	3.347	3.284	3.218	3.150	3.115	3.079	3.043	3.005	2.967	2.928
9	5.117	4.257	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.073	3.006	2.937	2.901	2.864	2.826	2.787	2.748	2.707
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.136	3.072	3.020	2.978	2.913	2.845	2.774	2.737	2.700	2.661	2.621	2.580	2.538
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.788	2.719	2.646	2.609	2.571	2.531	2.490	2.448	2.405
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.687	2.617	2.544	2.506	2.466	2.426	2.384	2.341	2.296
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.604	2.533	2.459	2.420	2.380	2.339	2.297	2.252	2.206
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.534	2.463	2.388	2.349	2.308	2.266	2.223	2.178	2.131
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.791	2.707	2.641	2.588	2.544	2.475	2.403	2.328	2.288	2.247	2.204	2.160	2.114	2.066

ОКОНЧАНИЕ ТАБЛ. П3

k_1	k_2																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494	2.425	2.352	2.276	2.235	2.194	2.151	2.106	2.059	2.010
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450	2.381	2.308	2.230	2.190	2.148	2.104	2.058	2.011	1.960
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412	2.342	2.269	2.191	2.150	2.107	2.063	2.017	1.968	1.917
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378	2.308	2.234	2.156	2.114	2.071	2.026	1.980	1.930	1.878
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.278	2.203	2.124	2.083	2.039	1.994	1.946	1.896	1.843
21	4.325	3.467	3.073	2.840	2.685	2.573	2.488	2.421	2.366	2.321	2.250	2.176	2.096	2.054	2.010	1.965	1.917	1.866	1.812
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297	2.226	2.151	2.071	2.028	1.984	1.938	1.890	1.838	1.783
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275	2.204	2.128	2.048	2.005	1.961	1.914	1.865	1.813	1.757
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255	2.183	2.108	2.027	1.984	1.939	1.892	1.842	1.790	1.733
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.237	2.165	2.089	2.008	1.964	1.919	1.872	1.822	1.768	1.711
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.266	2.220	2.148	2.072	1.990	1.946	1.901	1.853	1.803	1.749	1.691
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204	2.132	2.056	1.975	1.931	1.884	1.836	1.785	1.732	1.673
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190	2.118	2.041	1.959	1.915	1.869	1.820	1.769	1.714	1.654
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177	2.105	2.028	1.945	1.901	1.854	1.806	1.754	1.698	1.638
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.092	2.015	1.932	1.887	1.841	1.792	1.740	1.684	1.622
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.450	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	2.004	1.925	1.839	1.793	1.744	1.693	1.637	1.577	1.509
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.917	1.836	1.748	1.700	1.649	1.594	1.534	1.467	1.389
120	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016	1.959	1.911	1.834	1.751	1.659	1.608	1.554	1.495	1.429	1.352	1.254
∞	3.842	2.996	2.605	2.372	2.214	2.099	2.010	1.938	1.880	1.830	1.752	1.666	1.571	1.517	1.459	1.394	1.318	1.221	1.000

Таблица П4

Распределение Фишера (F-распределение) для уровня значимости $\alpha = 0{,}01$

k_1	k_2																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4500	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.51	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.888	9.722	9.553	9.466	9.379	9.291	9.202	9.112	9.020
6	13.75	10.93	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874	7.718	7.559	7.396	7.313	7.229	7.143	7.057	6.969	6.880
7	12.25	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620	6.469	6.314	6.155	6.074	5.992	5.908	5.824	5.737	5.650
8	11.26	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.667	5.515	5.359	5.279	5.198	5.116	5.032	4.946	4.859
9	10.56	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	5.111	4.962	4.808	4.729	4.649	4.567	4.483	4.398	4.311
10	10.04	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849	4.706	4.558	4.405	4.327	4.247	4.165	4.082	3.996	3.909
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.397	4.251	4.099	4.021	3.941	3.860	3.776	3.690	3.602
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.155	4.010	3.858	3.780	3.701	3.619	3.535	3.449	3.361
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	3.960	3.815	3.665	3.587	3.507	3.425	3.341	3.255	3.165
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.800	3.656	3.505	3.427	3.348	3.266	3.181	3.094	3.004
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.666	3.522	3.372	3.294	3.214	3.132	3.047	2.959	2.868
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691	3.553	3.409	3.259	3.181	3.101	3.018	2.933	2.845	2.753
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593	3.455	3.312	3.162	3.084	3.003	2.920	2.835	2.746	2.653
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508	3.371	3.227	3.077	2.999	2.919	2.835	2.749	2.660	2.566
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434	3.297	3.153	3.003	2.925	2.844	2.761	2.674	2.584	2.489
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.231	3.088	2.938	2.859	2.778	2.695	2.608	2.517	2.421

ОКОНЧАНИЕ ТАБЛ. П4

k_1	k_2																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310	3.173	3.030	2.880	2.801	2.720	2.636	2.548	2.457	2.360
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258	3.121	2.978	2.827	2.749	2.667	2.583	2.495	2.403	2.305
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211	3.074	2.931	2.781	2.702	2.620	2.535	2.447	2.354	2.256
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168	3.032	2.889	2.738	2.659	2.577	2.492	2.403	2.310	2.211
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129	2.993	2.850	2.699	2.620	2.538	2.453	2.364	2.270	2.169
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094	2.958	2.815	2.664	2.585	2.503	2.417	2.327	2.233	2.131
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062	2.926	2.783	2.632	2.552	2.470	2.384	2.294	2.198	2.097
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032	2.896	2.753	2.602	2.522	2.440	2.354	2.263	2.167	2.064
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005	2.868	2.726	2.574	2.495	2.412	2.325	2.234	2.138	2.034
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979	2.843	2.700	2.549	2.469	2.386	2.299	2.208	2.111	2.006
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801	2.665	2.522	2.369	2.288	2.203	2.114	2.019	1.917	1.805
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632	2.496	2.352	2.198	2.115	2.028	1.936	1.836	1.726	1.601
120	6.851	4.787	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559	2.472	2.336	2.192	2.035	1.950	1.860	1.763	1.656	1.533	1.381
∞	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407	2.321	2.185	2.039	1.878	1.791	1.696	1.592	1.473	1.325	1.000

ОГЛАВЛЕНИЕ

Сулаберидзе Владимир Шалвович

Методы анализа и обработки измеренных значений величин

Редактор *Г.В. Никитина*
Корректор *Л.А. Петрова*
Подписано в печать 20.03.2013. Формат 60×84/16. Бумага документная
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7. Тираж 100 экз. Заказ № 33
Балтийский государственный технический университет
Типография БГТУ
190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д. 1